Grundwissen Mathematik

Version 0.3.5c

Aktualisiert am 17.06.2017

Bernhard Grotz

http://www.grund-wissen.de

Die Quelldateien dieses Buchs wurden unter Linux mittels Vim und Sphinx, die enthaltenen Graphiken mittels Inkscape erstellt. Der Quellcode sowie die Original-Graphiken können über die Projektseite heruntergeladen werden:

http://www.grund-wissen.de

Bei Fragen, Anmerkungen und Verbesserungsvorschlägen bittet der Autor um eine kurze Email an folgende Adresse:

info@grund-wissen.de

Augsburg, den 17. Juni 2017.

Bernhard Grotz

Inhaltsverzeichnis

Logik

Die (Aussagen-)Logik ist für sämtliche Teilbereiche der Mathematik von grundlegender Bedeutung.

Satz und Aussage

Lässt sich einem Satz A ein Wahrheitswert ($w =$ wahr oder $f =$ falsch) eindeutig zuordnen, so wird dieser Satz zu einer Aussage.

Als Darstellungsform für den Wahrheitswert von Aussagen wählt man häufig so genannte "Wahrheitstafeln". Dabei werden spaltenweise die Wahrheitswerte der in der Kopfzeile angegebenen Aussage(n) aufgelistet.

A
w
f

Beispiele:

- Der Satz "$1 + 2 = 3$" ist eine wahre Aussage.
- Der Satz "9 ist eine Primzahl" ist eine falsche Aussage.
- Der Satz "Die Donau fließt ins schwarze Meer" ist eine wahre Aussage.
- Der Satz "Es ist spät" ist keine Aussage, da ihm kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann.

Ein Satz ist auch dann eine Aussage, wenn sein Wahrheitswert zum gegebenen Zeitpunkt nicht feststellbar ist. Beispielsweise handelt es sich bei dem Satz "Am 3. April 1650 regnete es in Berlin." ebenfalls um eine Aussage, auch wenn sich ihr Wahrheitswert mit großer Wahrscheinlichkeit nicht mehr feststellen lässt.

Negation einer Aussage

Durch Verneinen einer Aussage A entsteht eine Aussage $\neg A$, die Negation der Aussage A genannt wird. Da der konkrete Wahrheitswert einer negierten Aussage $\neg A$ stets vom Wahrheitswert der eigentlichen Aussage A abhängt, hat die entsprechende Wahrheitstafel zwei Spalten.

Tab. 1: Wahrheitstafel der Konjunktion

A_1	A_2	$A_1 \wedge A_2$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	$\neg A$
w	f
f	w

Die Negation einer wahren Aussage ist falsch, die einer falschen ist wahr; insbesondere entspricht die doppelte Negation einer Aussage $\neg(\neg A)$ der ursprünglichen Aussage A.

Beispiele:

- A: "Die Geraden g und h schneiden sich."
- $\neg A$: "Die Geraden g und h schneiden sich nicht."
- $\neg(\neg A)$: "Es ist nicht wahr, dass die Geraden g und h sich nicht schneiden."

Verknüpfungen von Aussagen

Mit Hilfe von Bindewörtern wie "und", "oder", "genau dann, wenn" usw. lassen sich mehrere (Teil-)Aussagen zu einer zusammengesetzten Aussage verknüpfen. In der Logik lassen sich mit Hilfe der folgenden Aussage-Funktionen *zwei* (oder mehrere) Aussagen zu *einer* neuen Aussage formen.

Die Konjunktion

Verknüpft man zwei Aussagen A_1 und A_2 durch das Wort "und", so entsteht die Konjunktion der Aussagen A_1 und A_2, symbolisch mit $A_1 \wedge A_2$ bezeichnet.

Eine Konjunktion zweier Aussagen ist somit nur wahr, wenn beide (Teil-)Aussagen wahr sind.

Beispiele:

- Die Konjunktion der wahren Aussage A_1 "8 ist eine gerade Zahl" mit der falschen Aussage A_2 "8 ist durch 3 teilbar" ist die falsche Aussage $A_1 \wedge A_2$: "8 ist eine gerade Zahl und durch 3 teilbar".
- Die falsche Aussage "Der Mars ist ein Gasplanet und hat eine größere Masse als die Erde" ist eine Konjunktion der falschen Aussagen "Der Mars ist ein Gasplanet" und "Der Mars hat eine größere Masse als die Erde".

Tab. 2: Wahrheitstafel der Adjunktion

A_1	A_2	$A_1 \vee A_2$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Tab. 3: Wahrheitstafel der Implikation

A_1	A_2	$A_1 \Rightarrow A_2$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Adjunktion

Verknüpft man zwei Aussagen A_1 und A_2 durch das Wort “oder”, so entsteht die Adjunktion der Aussagen A_1 und A_2, symbolisch mit $A_1 \vee A_2$ bezeichnet.

Die Adjunktion ist somit wahr, wenn eine der beiden Aussagen wahr ist (oder beide wahr sind).

Beispiele:

- Die Adjunktion der wahren Aussage $0 < 1$ und der falschen Aussage $0 = 1$ ist die wahre Aussage $0 \leq 1$.
- Die wahre Aussage: “Entweder ist die Erde ein Würfel oder die Sonne ist ein Stern” ist eine Adjunktion der falschen Aussage: “Die Erde ist ein Würfel” und der wahren Aussage: “Die Sonne ist ein Stern”.

Die Implikation

Verknüpft man zwei Aussagen A_1 und A_2 durch das Wort “dann”, so entsteht die Implikation der Aussagen A_1 und A_2, symbolisch mit $A_1 \Rightarrow A_2$ bezeichnet.

Die Implikation ist wahr, wenn beide Aussagen A_1 und $A2$ wahr sind oder wenn die erste Aussage A_1 falsch ist.[1] Formal erhält man eine identische Wahrheitstafel, wenn man die Implikation $(\neg A_2) \Rightarrow (\neg A_1)$ bildet.[2][3]

[1] Der letztere Fall wird bisweilen auch als “Ex falso quodlibet” bezeichnet – aus einer falschen Annahme folgt Beliebiges.

[2] Die vorschnelle Annahme, dass aus $A_1 \Rightarrow A_2$ auch $(\neg A_1) \Rightarrow (\neg A_2)$ folge, ist hingegen falsch.

Ein anschauliches Beispiel hierfür ist die Aussage $A_1 \Rightarrow A_2$ “Wenn es regnet, dann ist es bewölkt.” Die Aussage $(\neg A_1) \Rightarrow (\neg A_2)$ würde lauten “Wenn es nicht regnet, dann ist es nicht bewölkt”, was offensichtlich falsch ist. Die Aussage $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ “Wenn es nicht bewölkt ist, dann regnet es nicht” ist hingegen richtig.

Man sagt daher auch, dass A_1 notwendig für A_2 sei und dass A_2 hinreichend für A_1 sei.

[3] Es existiert sogar eine dritte Darstellungsweise der Implikation, und zwar $(\neg A_1) \vee A_2$. Dies lässt anhand der *Wahrheitstabelle der Adjunktion* überprüfen, indem man für A_1 die jeweils entgegengesetzten

Tab. 4: Wahrheitstafel der Äquivalenz

A_1	A_2	$A_1 \Leftrightarrow A_2$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beispiele:

- Die Aussage “Wenn $2 < 1$ ist, dann ist $3 < 2$” ist wahr, obwohl sie eine Implikation zweier falscher (Teil-)Aussagen ist.
- Die Implikation der wahren Aussage “Die Lichtgeschwindigkeit beträgt annähernd 300 000 km/s” und der falschen Aussage “Die Schallgeschwindigkeit ist größer als die Lichtgeschwindigkeit“ ist die falsche Aussage “Die Schallgeschwindigkeit beträgt mehr als 300 000 km/s”.

Äquivalenz zweier Aussagen

Verknüpft man zwei Aussagen A_1 und A_2 durch die Wortkombination “dann, und nur dann”, so entsteht die Äquivalenz der Aussagen A_1 und A_2, symbolisch mit $A2 \Leftrightarrow A_2$ bezeichnet.

Die Äquivalenz zweier Teilaussagen ist nur wahr, wenn entweder beide Teilaussagen wahr oder beide falsch sind.[4]

Beispiele:

- Die wahre Aussage “Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Höhensatz” äquivalent verknüpft mit der falschen Aussage “Im rechtwinkligen Dreieck sind alle Seiten gleich lang” ergibt die falsche Aussage “Im rechtwinkligen Dreieck sind dann und nur dann alle Seiten gleich lang, wenn der Höhensatz gilt”.
- Die Äquivalenzverknüpfung der falschen Aussage “Das Kilogramm ist eine Längeneinheit” mit der wahren Aussage “Tausend Meter ergeben einen Kilometer” ist die falsche Aussage “Das Kilogramm ist dann und nur dann eine Längeneinheit, wenn tausend Meter einen Kilometer ergeben”.

Wahrheitswerte annimmt und das Ergebnis der so gebildeten Adjunktion mit der *Wahrheitstabelle der Implikation* vergleicht.

[4] Formal erhält man eine identische Wahrheitstafel, wenn man die beiden Implikationen $(A_1) \Rightarrow (A_2)$ und $(A_2) \Rightarrow (A_1)$ bildet und durch eine Konjunktion miteinander verknüpft. Es gilt also:

$$(A_1 \Leftrightarrow A_2) \Leftrightarrow ((A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_1))$$

Tab. 5: Wahrheitstafel der Kontravalenz

A_1	A_2	$A_1 \dot{\vee} A_2$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Kontravalenz zweier Aussagen

Verknüpft man zwei Aussagen A_1 und A_2 durch das Wort "entweder oder" im ausschließenden Sinn, so entsteht die Kontravalenz der Aussagen A_1 und A_2, mit mit $A_1 \dot{\vee} A_2$ bezeichnet.

Die Kontravalenz zweier Teilaussagen ist nur dann wahr, wenn genau eine der beiden (Teil-)Aussagen wahr ist. Damit ist sie formal, wie ihr Name bereits andeutet, mit der Negation der Äquivalenz identisch.

Beispiel:

- Verknüpft man die wahre Aussage "Der Zug fährt nach München" kontravalent mit der falschen Aussage "Der Zug fährt nach Frankfurt", so ergibt sich die wahre Aussage "Der Zug fährt entweder nach München oder nach Frankfurt".

Regeln zu den Aussagenverknüpfungen

Zwischen den Aussagen beziehungsweise ihren Verknüpfungen sind folgende Äquivalenzen definiert, von denen einige eine formale Ähnlichkeit mit den Regeln für das Rechnen mit Zahlen haben:

- *Kommutativgesetz:*

$$A_1 \wedge A_2 \Leftrightarrow A_2 \wedge A_1$$
$$A_1 \vee A_2 \Leftrightarrow A_2 \vee A_1$$

- *Assoziativgesetz:*

$$(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 \Leftrightarrow A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)$$
$$(A_1 \vee A_2) \vee A_3 \Leftrightarrow A_1 \vee (A_2 \vee A_3)$$

- *Distributivgesetz:*

$$A_1 \wedge (A_2 \vee A_3) \Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2) \vee (A_2 \wedge A_3)$$
$$A_1 \vee (A_2 \wedge A_3) \Leftrightarrow (A_1 \vee A_2) \wedge (A_2 \vee A_3)$$

Hinzu kommen folgende Regeln, die bisweilen für Beweisverfahren sowie in der Informatik nützlich sind:

- *Regeln von de Morgan:*

$$\neg(A_1 \wedge A_2) \Leftrightarrow (\neg A_1) \vee (\neg A_2)$$
$$\neg(A_1 \vee A_2) \Leftrightarrow (\neg A_1) \wedge (\neg A_2)$$

- *Absorptionsgesetz:*

$$A_1 \wedge (A_1 \vee A_2) \Leftrightarrow A_1$$
$$A_1 \vee (A_1 \wedge A_2) \Leftrightarrow A_1$$

- *Idempotenzgesetz:*

$$A \wedge A \Leftrightarrow A$$
$$A \vee A \Leftrightarrow A$$

- *Komplementgesetz:*

$$A_1 \vee (\neg A_2 \wedge A_2) \Leftrightarrow A$$
$$A_1 \wedge (\neg A_2 \vee A_2) \Leftrightarrow A$$

Dabei wird die Verknüpfung $(\neg A) \vee A$ auch "Tautologie" genannt; sie ist stets wahr.[5]

Variablen, Terme und Aussageformen

Eine Variable ist ein Symbol für ein beliebiges Element aus einer vorgegebenen Grundmenge. Darüber hinaus gelten für das Rechnen mit Variablen keine besonderen Regeln oder Gesetze.

Ein Term ist eine Bezeichnung zum einen für ein einzelnes mathematisches Objekt (beispielsweise $\pm\frac{1}{2}$, π, $\sqrt{3}$), zum anderen auch für eine Aneinanderreihung mehrerer Konstanten, Variablen, Klammern und Rechenoperatoren (beispielsweise $2 \cdot (x^2 - 1),\; x \in \mathbb{R}$).[6] Terme enthalten allerdings kein Relationszeichen, sie sind somit weder wahr noch falsch.

Eine Aussageform enthält neben (mindestens) einer Variablen und (mindestens) einem Term stets ein Relationszeichen – beispielsweise $x \ge 1$ oder $x_1 \cdot x_2 = 0$. Um allerdings einer Aussageform auch einen Wahrheitswert zuordnen zu können, müssen zunächst alle auftretenden Variablen durch konkrete Elemente aus der Grundmenge ersetzt werden. Ebenso wie Aussagen lassen sich mehrere Aussageformen durch logische Verknüpfungen zu neuen Aussageformen kombinieren.

Die Abhängigkeit einer Aussageform von einer oder mehreren Variablen $x_1, x_2, \ldots$ wird in der Form $A(x_1, x_2, \ldots)$ ausgedrückt. Dabei lassen sich Aussageformen in drei Arten unterteilen:

- Wird eine von einer Variablen x abhängige Aussageform $A(x)$ für jedes beliebige x aus einer Grundmenge X erfüllt, so bezeichnet man die Aussageform $A(x)$ als allgemeingültig bezüglich X.
- Existiert mindestens ein x aus der Grundmenge X, das die Aussageform $A(x)$ erfüllt, so bezeichnet man die Aussageform $A(x)$ als erfüllbar bezüglich X.

[5] Das Gegenteil der Tautologie, die Aussage $A \wedge (\neg A)$, heißt Kontradiktion; sie ist für jede beliebige Aussagen A stets falsch.

[6] Setzt man für die in Termen auftretenden Variablen konkrete mathematische Objekte des Grundbereichs ein, so ergibt sich ein neuer mathematischer Ausdruck; beispielsweise ergibt der Term $8 \cdot x - 10$ für $x = 1$ den Wert -2.

- Existiert kein x aus der Grundmenge X, das die Aussageform $A(x)$ erfüllt, so bezeichnet man die Aussageform $A(x)$ als unerfüllbar bezüglich X.

Aussageformen werden insbesondere in der Algebra als *Gleichungen* und *Ungleichungen* behandelt.

'Für alle' und 'Es gibt'

Aussageformen können – neben dem Einsetzen von konkreten Objekten für die auftretenden Variablen – auch auf eine zweite Art und Weise zu Aussagen gemacht werden: Der Quantifizierung.

- Eine allgemeine Aussageform $A(x)$ wird zu einer "Existenz-Aussage", wenn folgende Forderung erfüllt ist:

  > "Es existiert (mindestens) ein Element x aus der Grundmenge X", für das die Aussageform $A(x)$ wahr ist."

  Verkürzend kann eine Existenz-Aussage mit Hilfe des so genannten "Existenz-Quantors" $\exists$ formuliert werden: Anstelle von "Es existiert (mindestens) ein x" kann auch kurz $\exists x$ geschrieben werden.

- Eine allgemeine Aussageform $A(x)$ wird zu einer "Universal-Aussage", wenn folgende Forderung erfüllt ist:

  > "Für jedes Element x aus der Grundmenge X" ist die Aussageform $A(x)$ wahr."

  Verkürzend kann eine Universal-Aussage mit Hilfe des so genannten "All-Quantors" $\forall$ formuliert werden: Anstelle von "Für alle x" kann auch kurz $\forall x$ geschrieben werden.

Während eine Existenz-Aussage $\exists x : A(x)$ wahr ist, wenn die zugrunde liegende Aussageform $A(x)$ auch nur für ein konkretes x erfüllt wird, so kann im umgekehrten Fall eine Universal-Aussage $\forall x : A(x)$ bereits durch den Existenz-Nachweis eines einzigen "Gegenbeispiels" $\exists x : \neg A(x)$ als falsch widerlegt werden.[7][8]

Direkte und indirekte Beweise

Die formalen Regeln der Logik können auch genutzt werden, um mittels bereits als wahr nachgewiesener Aussageformen Schlussfolgerungen auf neue Gesetzmäßigkeiten ziehen zu können. Auf diese Art gewonnene Lehrsätze (auch "Theoreme" oder kurz "Sätze" genannt) stellen das Grundgerüst der mathematischen Theorie dar.

Neben bereits bekannten Lehrsätzen werden auch so genannte Definitionen genutzt, um neue Sätze beweisen zu können. Beim Definieren wird ein Begriff durch die Festlegung

[7] In Zusammenhang mit den Quantoren $\exists$ und $\forall$ stellt der folgende Doppelpunkt **:** eine Kurzschreibweise für "so dass gilt:" beziehungsweise "gilt:" dar.

[8] Auch kombinierte Quantifizierungs-Aussagen sind möglich, beispielsweise "Für jeden Menschen m existiert ein Tag t, so dass die Aussageform $A(m,t)$ erfüllt ist: m hat am Tag t Geburtstag". Als Kurzform kann für diese (wahre) Aussage $\forall m \; \exists t : A(m,t)$ geschrieben werden.

wesentlicher, gemeinsamer Merkmale eindeutig bestimmt und von anderen Begriffen unterschieden. Definitionen sind weder wahr noch falsch, sie dienen vielmehr als Abkürzungen für unhandliche Formulierungen. Als Definitionszeichen für mathematische Terme verwendet man das Zeichen :=, eine Kurzschreibweise für “ist nach Definition gleich”.

Für die eigentlichen “Beweise” sind u.a. folgende aussagenlogische Schlussregeln möglich:

- **Schlussfolgerung aus einer Implikation:** Gilt eine Aussage A_1 und ist die Implikation $A_1 \Rightarrow A_2$ wahr, so ist auch A_2 eine wahre Aussage. Kurz formuliert ist somit der aussagenlogische Ausdruck $[A_1 \wedge (A_1 \Rightarrow A_2)] \Rightarrow A_2$ allgemeingültig.
- **Schlussfolgerung aus einer Negation:** Der aussagenlogische Ausdruck $\neg(\neg A) \Rightarrow A$ ist allgemeingültig. Eine Aussage kann somit bewiesen werden, indem man die Negation der Aussage widerlegt.

Bei direkten Beweisen wird, ausgehend von gültigen Voraussetzungen und unter Verwendung von zulässigen Schlussregeln, nach endlich vielen Schritten direkt auf die Behauptung gefolgert. Bei indirekten Beweisen hingegen wird die Negation der Behauptung zu den Voraussetzungen hinzugenommen.

Die vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein häufig genutztes Verfahren zum direkten Beweisen einer Aussage. Die logische Schlussfolgerung beruht dabei auf drei Schritten:

1. Mit dem “Induktionsanfang” wird gezeigt, dass eine Aussageform $A(x)$ für ein (beliebig wählbaren) Wert $x = n$ gültig ist.
2. Die “Induktionsannahme” besteht darin, dass die Aussageform $A(x)$ für ein bestimmtes n gültig ist.
3. Mit dem “Induktionsschluss”, einem “Beweis im Beweis”, wird gezeigt, dass aus der Gültigkeit der Aussage $A(n)$ auch die Gültigkeit der Aussage $A(n+1)$ folgt, in Kurzschreibweise $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Beispiel:

- Mit Hilfe der vollständigen Induktion soll bewiesen werden, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

  1. Induktionsanfang: Für $n_0 = 1$ gilt:

  $$1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \quad \checkmark$$

  2. Induktionsannahme: Für eine beliebige Zahl n_0 gilt die Aussageform

  $$1 + 2 + \ldots n_0 = \frac{n_0 \cdot (n_0+1)}{2}$$

  3. Induktionsschluss: $n_0 \Rightarrow n_0 + 1$

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + n_0 + (n_0 + 1) &= \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1)}{2} + (n_0 + 1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot n_0 \cdot (n_0 + 1) + (n_0 + 1) = (n_0 + 1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot n_0 + 1 \right) \\
&= (n_0 + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (n_0 + 2) = \frac{(n_0 + 1) \cdot (n_0 + 2)}{2} \\
&= \frac{(n_0 + 1) \cdot ((n_0 + 1) + 1)}{2} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Aus der Richtigkeit der Aussageform für n_0 folgt somit auch die Richtigkeit der Annahme für $n_0 + 1$. Somit ist die Aussageform für alle $n \geq 1$ wahr.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Mengenlehre

Mengen und ihre Eigenschaften

Der Begriff "Menge" wurde erstmals von Georg Cantor benutzt. Er bezeichnete damit eine "Zusammenfassung von bestimmten, klar unterscheidbaren Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens zu einem Ganzen."

Eine Menge (Kurzschreibweise: $\mathbb{M}$) hat damit folgende Eigenschaften:[1]

- Eine Menge ist genau dann festgelegt, wenn sich von allen Objekten festlegen lässt, ob sie zur Menge gehören oder nicht.
- Ein Objekt darf nicht mehrfach in der Menge enthalten sein.

Die in einer Menge enthaltenen Objekte werden als Elemente bezeichnet.

Beispiele:

- Die Teilnehmer eines bestimmten Lehrgangs sind wohlunterschiedene Objekte unserer Anschauung, sie bilden also eine Menge.
- Die natürlichen Zahlen sind wohlunterschiedene Objekte unseres Denkens und bilden somit eine Menge.
- Die abstrakten Objekte 2, $\sqrt{4}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{12}{6}$ bilden eine einelementige Menge, da sie untereinander gleich sind.
- Die Menge der Primzahlen enthält unendlich viele Elemente.
- Die umgangssprachlichen Bezeichnungen: "eine Menge Geld", "eine Menge Wasser" usw. werden in der Mathematik nicht als Mengen angesehen, da sich nicht genau angeben lässt, welche Objekte dazugehören.

Als Variablen für Mengen werden Großbuchstaben, als Variablen für Elemente einer Menge Kleinbuchstaben verwendet. $\mathbb{M}$ ist eine Menge, wenn für jedes konkrete oder abstrakte

[1] Genaugenommen lassen sich, wenn man den Begriff "Menge" nicht genauer fasst, paradoxe Aussagen formulieren. Am bekanntesten ist die Russelsche Antinomie:

> "Gibt es eine Menge, die nur Elemente enthält mit der Eigenschaft, dass sie in keiner Menge enthalten sind?"

Durch eine Formulierung von bestimmten Bedingungen, die jede Menge erfüllen muss, konnten die Mathematiker Ernst Zermelo und Abraham Adolf Fränkel im Jahr 1930 eine widerspruchsfreie Mengenlehre einführen. Für die meisten alltäglichen Mathematik-Aufgaben genügt allerdings der ursprüngliche Mengenbegriff.

Objekt x der Satz "$x \in \mathbb{M}$" eine wahre oder falsche Aussage ist. Gehört zu einer Menge kein konkretes oder abstraktes Objekt, so wird sie als leere Menge bezeichnet und mit dem Symbol $\emptyset$ dargestellt.

Die mathematische Kurzschreibweise $x \in \mathbb{M}$ bedeutet, dass das Element x in der Menge $\mathbb{M}$ enthalten ist. Ist dieser Satz

- für alle x falsch, so ist $\mathbb{M}$ eine leere Menge,
- für endlich viele x wahr, so ist $\mathbb{M}$ eine endliche Menge,
- für unendlich viele x wahr, so ist $\mathbb{M}$ eine unendliche Menge.

Ist ein Element x nicht in der Menge $\mathbb{M}$ enthalten, so schreibt man $x \notin \mathbb{M}$.

Darstellung von Mengen

Mengen lassen sich auf verschiedene Arten angeben:

- **Aufzählende Form:** Die Symbole der Objekte werden in geschweiften Klammern, durch Komma getrennt, aufgelistet.

  Beispiele:

  - $\mathbb{M}_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$
  - $\mathbb{M}_2 = \{a, b, c, d\}$

- **Kennzeichnende Form:** In der geschweiften Klammer wird eine Regel aufgeschrieben, anhand derer festgelegt ist, ob ein bestimmtes Element zur Menge gehört oder nicht.

  Beispiel:

  - $\mathbb{M}_3 = \{x \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$

  Die Schreibweise $\mathbb{M} = \{x|A(x)\}$ bedeutet somit, dass genau dann $x \in \mathbb{M}$ gilt, wenn die *Aussageform* $A(x)$ wahr ist.

- **Mengendiagramme:** Die Elemente der Menge werden innerhalb einer geschlossenen Kurve dargestellt ("Venn-Diagramm")

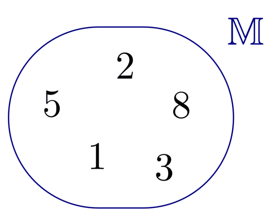


Abb. 1: Beispiel eines Venn-Diagramms.

Mengengleichheit

Zwei Mengen $\mathbb{M}_1$ und M_2 sind gleich, wenn jedes Element von $\mathbb{M}_1$ auch Element von $\mathbb{M}_2$ ist, in Kurzschreibweise $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2$.

$$\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_2 \land \mathbb{M}_2 \subset \mathbb{M}_1)$$

Teilmenge und Obermenge

Sind alle Elemente der Menge $\mathbb{M}_1$ auch Elemente der Menge $\mathbb{M}_2$, so ist $\mathbb{M}_1$ eine Teilmenge von $\mathbb{M}_2$, in Kurzschreibweise $\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_2$. Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten:

- $\mathbb{M}_1$ heißt *echte* Teilmenge von $\mathbb{M}_2$, wenn $\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_2$ gilt und $\mathbb{M}_2$ mindestens ein Element besitzt, das nicht zu $\mathbb{M}_1$ gehört.
- $\mathbb{M}_1$ heißt *unechte* Teilmenge von $\mathbb{M}_2$, wenn $\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_2$ gilt und $\mathbb{M}_2$ kein Element besitzt, das nicht zu $\mathbb{M}_1$ gehört – es gilt $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2$.

$$\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x \in \mathbb{M}_1 \Rightarrow x \in \mathbb{M}_2)$$

In beiden Fällen wird die Menge $\mathbb{M}_2$, die auch alle Elemente von $\mathbb{M}_1$ enthält, als Obermenge von $\mathbb{M}_1$ bezeichnet.

Beispiel:

- $\mathbb{M}_1 = \{3, 5, 7\}$, $\mathbb{M}_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\} \;\Rightarrow\; \mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_2$

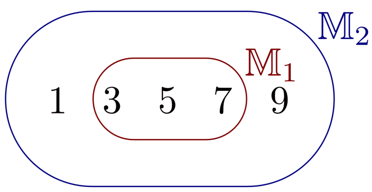


Abb. 2: Venn-Diagramm einer Teilmenge.

Mengenoperationen

Die Schnittmenge

Unter der Schnittmenge zweier Mengen $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$ versteht man die Menge aller Objekte, die sowohl zu $\mathbb{M}_1$ als auch zu $\mathbb{M}_2$ gehören, in Kurzschreibweise $\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2$.

$$x \in \mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathbb{M}_1 \land x \in \mathbb{M}_2$$

Beispiel:

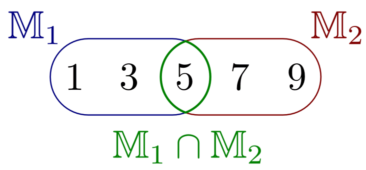


Abb. 3: Venn-Diagramm einer Schnittmenge.

- $\mathbb{M}_1 = \{1, 3, 5\}$, $\mathbb{M}_2 = \{5, 7, 9\} \ \Rightarrow \ \mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2 = \{5\}$

Nach dem gleichen Prinzip lässt sich auch die Schnittmenge mehrerer Mengen bilden. Mengen, die keine gemeinsamen Elemente haben, werden als disjunkte oder elementefremde Mengen bezeichnet.

Die Vereinigungsmenge

Die Menge aller Objekte, die zu mindestens einer der Mengen $\mathbb{M}_1$ oder $\mathbb{M}_2$ gehören, heißt Vereinigungsmenge von $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$, in Kurzschreibweise: $\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2$.

$$x \in \mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathbb{M}_1 \vee x \in \mathbb{M}_2$$

Beispiel:

- $\mathbb{M}_1 = \{1, 3, 5\}$, $\mathbb{M}_2 = \{5, 7, 9\} \ \Rightarrow \ \mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

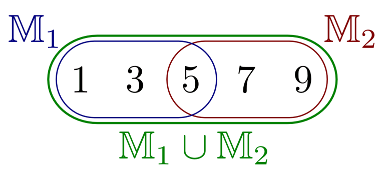


Abb. 4: Venn-Diagramm einer Vereinigungsmenge.

Nach dem gleichen Prinzip lässt sich auch die Vereinigungsmenge mehrerer Mengen bilden.

Die Differenz- und Komplementärmenge

Die Menge aller Objekte, die zu $\mathbb{M}_1$ gehören, ohne zugleich auch zu $\mathbb{M}_2$ zu gehören, heißt Differenzmenge (oder auch Restmenge) der Mengen $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$, in Kurzschreibweise $\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2$.

$$x \in \mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathbb{M}_1 \wedge x \notin \mathbb{M}_2$$

Beispiel:

- $\mathbb{M}_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\mathbb{M}_2 = \{7, 9\} \ \Rightarrow \ \mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2 = \{1, 3, 5\}$

Die Komplementärmenge $\mathbb{M}_1^*$ einer Menge $\mathbb{M}_1$ ist diejenige Menge bezüglich einer Obermenge $\mathbb{M}$, deren Elemente zwar zu $\mathbb{M}$, aber nicht zu $\mathbb{M}_1$ gehören. Somit gilt $\mathbb{M}_1^* = \mathbb{M} \setminus \mathbb{M}_1$.

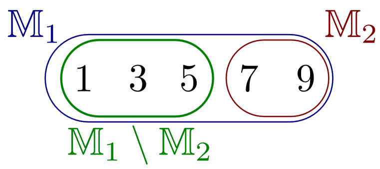


Abb. 5: Venn-Diagramm einer Differenzmenge.

Die Produktmenge

Die Produktmenge (auch Kreuzmenge oder kartesisches Produkt) der Mengen $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$ ist die Menge sämtlicher geordneter Paare, die mit den Elementen der Menge $\mathbb{M}_1$ (an erster Stelle) und denen der Menge $\mathbb{M}_2$ (an zweiter Stelle) gebildet werden können, in Kurzschreibweise $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$:[2]

$$(x\,,\,y) \in \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathbb{M}_1 \wedge y \in \mathbb{M}_2$$

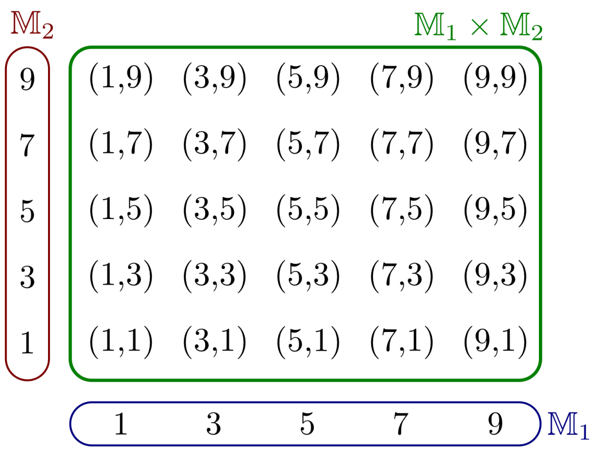


Abb. 6: Venn-Diagramm einer Produktmenge.

Ordnet man die Elemente von $\mathbb{M}_1$ als Punkte eines Zahlenstrahls und die Elemente von $\mathbb{M}_2$ auf einem dazu senkrecht stehenden Zahlenstrahl an, dann stellen sich die Elemente $(x_{\mathrm{i}}\,,\,y_{\mathrm{i}})$ von $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ als Punkte der Ebene dar, die von den beiden Zahlenstrahlen aufgebaut wird. Führt man diesen Gedanken fort, so findet man, dass alle Punkte einer xy-Koordinatenebene mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ durch die Elemente von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dargestellt werden können.

[2] Ein Element (x, y) einer Produktmenge ist nicht mit einer Menge $\{x, y\}$ zu verwechseln. Während in letzterer die Reihenfolge von x und y keine Rolle spielt, d.h. $\{x, y\} = \{y, x\}$ gilt, sind zwei Elemente einer Produktmenge nur gleich, wenn ihre Komponenten paarweise gleich sind, wenn also gilt:

$$(x_1,\, y_1) = (x_2,\, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)$$

Rechenregeln für Mengenoperationen

Für Mengenverknüpfungen gelten ähnliche Rechenregeln wie beim Rechnen mit Zahlen. Es gilt:

- Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2 &= \mathbb{M}_2 \cap \mathbb{M}_1 \\ \mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2 &= \mathbb{M}_2 \cup \mathbb{M}_1 \end{aligned}$$

- Assoziativgesetz:[3]

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1 \cap (\mathbb{M}_2 \cap \mathbb{M}_3) &= (\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2) \cap \mathbb{M}_3 \\ \mathbb{M}_1 \cup (\mathbb{M}_2 \cup \mathbb{M}_3) &= (\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2) \cup \mathbb{M}_3 \end{aligned}$$

- Distributivgesetz:[4]

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1 \cap (\mathbb{M}_2 \cup \mathbb{M}_3) &= (\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2) \cup (\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_3) \\ \mathbb{M}_1 \cup (\mathbb{M}_2 \cap \mathbb{M}_3) &= (\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2) \cap (\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_3) \end{aligned}$$

Zusätzlich gilt für beliebige Mengen:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1 \setminus (\mathbb{M}_2 \cup \mathbb{M}_3) &= (\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2) \cap (\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_3) \\ \mathbb{M}_1 \setminus (\mathbb{M}_2 \cap \mathbb{M}_3) &= (\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2) \cup (\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1 \times (\mathbb{M}_2 \cup \mathbb{M}_3) &= (\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) \cup (\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_3) \\ \mathbb{M}_1 \times (\mathbb{M}_2 \cap \mathbb{M}_3) &= (\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) \cap (\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_3) \end{aligned}$$

Für Verknüpfungen mit der leeren Menge $\emptyset$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \cup \emptyset &= \mathbb{M} \\ \mathbb{M} \cap \emptyset &= \emptyset \\ \mathbb{M} \setminus \emptyset &= \mathbb{M} \\ \emptyset \setminus \mathbb{M} &= \emptyset \end{aligned}$$

[3] Da hierbei die Reihenfolge der Zusammenfassung beliebig ist, kann auf die Klammern verzichtet werden.

[4] Genau genommen entspricht die obige Darstellung nur der "linksseitigen" Distributivität. Für zwei Mengen gilt jedoch ebenso die "rechtsseitige" Distributivität:

$$\begin{aligned} (\mathbb{M}_2 \cup \mathbb{M}_3) \cap \mathbb{M}_1 &= (\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2) \cup (\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_3) \\ (\mathbb{M}_2 \cap \mathbb{M}_3) \cup \mathbb{M}_1 &= (\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2) \cap (\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_3) \end{aligned}$$

Gelten sowohl die linksseitige wie auch die rechtsseitige Distributivität, wird allgemein von "Distributivität" gesprochen.

Die Mächtigkeit von Mengen

Haben zwei endliche Mengen $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$ die gleiche Anzahl an Elementen, so bezeichnet man $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$ als gleichmächtig. Die Anzahl A aller Elemente einer endlichen Menge $\mathbb{M}$ wird auch Kardinalzahl genannt.

Die Abzählbarkeit

Die Mächtigkeit von unendlichen Mengen wird an der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ gemessen. Lässt sich jedes Element einer Menge $\mathbb{M}$ in eindeutiger Weise einem Element aus $\mathbb{N}$ zuordnen, so wird die Menge $\mathbb{M}$ als abzählbar bezeichnet; die Elemente von $\mathbb{M}$ lassen sich also mit Hilfe der natürlichen Zahlen "numerieren".

Beispiel:

- Jeder Zahl n aus der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ kann durch die Zuordnung $2 \cdot n$ eine geradzahlige natürliche Zahl zugeordnet werden. Die (unendliche) Menge der geradzahligen natürlichen Zahlen ist somit ebenfalls abzählbar.

Ist eine Menge nicht abzählbar, wie beispielsweise die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, so wird sie überabzählbar genannt.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Abbildungen, Funktionen, Relationen und Operationen

Abbildungen

Unter einer Abbildung F aus einer Menge $\mathbb{M}_1$ in eine Menge $\mathbb{M}_2$ versteht man eine Teilmenge der *Produktmenge* $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$.

$$F \subseteq \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$$

F ist somit eine Menge von geordneten Paaren (x, y) mit $x \in \mathbb{M}_1$ und $y \in \mathbb{M}_2$. Man sagt, dass durch die Abbildung F das Element y dem Element x zugeordnet wird.[1] Die Mengen $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$ können auch gleich sein.

Beispiel:

- Durch eine Abbildung $F \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kann beispielsweise jeder reellen Zahl x ihre Quadratzahl x^2 zugeordnet werden. Es ist dann $(x, x^2) \in F$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Menge aller $x \in \mathbb{M}_1$, für die ein $y \in \mathbb{M}_2$ existiert, nennt man Definitionsbereich der Abbildung; entsprechend nennt man die Menge aller $y \in \mathbb{M}_2$, für die ein zugehöriges $x \in \mathbb{M}_1$ existiert, Wertebereich der Abbildung.

[1] In diesem Zusammenhang wird x auch als "Urbild" von y beziehungsweise y als "Bild" von x.

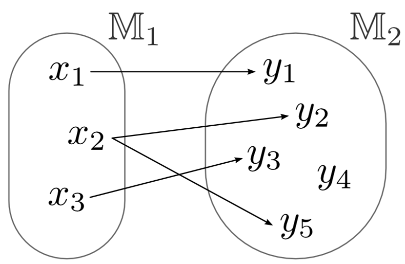


Abb. 7: Beispielhaftes Venn-Diagramm einer Abbildung.

Inverse Abbildung

Unter einer inversen Abbildung F_{U} (auch "Umkehrabbildung" genannt) versteht man die Menge aller geordneten Paare (y, x), für die $(x, y) \in F$ gilt.

Der Definitionsbereich der inversen Abbildung ist der Wertebereich der ursprünglichen Abbildung und umgekehrt; die inverse Abbildung der inversen Abbildung ist mit der ursprünglichen Abbildung identisch.

Verkettung von Abbildungen

Es sei F_1 eine Abbildung von $\mathbb{M}_1$ in $\mathbb{M}_2$ und F_2 eine Abbildung aus $\mathbb{M}_2$ in $\mathbb{M}_3$. Eine Abbildung $F_3 = F_2 \circ F_1$ (gelesen: "F_2 verkettet mit F_1") wird dann als Verkettung (Hintereinanderausführung) bezeichnet, wenn für alle geordneten Paare $(x, y) \in F_1$ und $(y, z) \in F_2$ gilt: $(x, z) \in F_3$.

Allgemein gilt für Verkettungen von Abbildungen zwar das Assoziativgesetz nicht, die Reihenfolge der Abbildungen ist also nicht vertauschbar; jedoch gilt das Assoziativ-Gesetz in folgender Form:

$$F_3 \circ (F_2 \circ F_1) = (F_3 \circ F_2) \circ F_1$$

Für eindeutige Abbildungen (Funktionen) ist folgende Darstellung üblich:

$$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$$

Man nennt dabei die Funktion f_1 die innere Funktion und f_2 die äußere Funktion der Verkettung. Somit ist die Reihenfolge der Verkettung ("f_2 nach f_1") gut erkennbar.

Beispiel:

- Es sei $z = f_2(y) = \sqrt{y}$ sowie $y = f_1(x) = x^2 + 1$. Somit gilt $z = f_2(f_1(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Funktionen

Eine Abbildung f aus M_1 in M_2 heißt eindeutig, wenn jedem $x \in M_1$ höchstens ein $y \in M_2$ zugeordnet wird. Eine derartige Abbildung f wird Funktion genannt; man bezeichnet sie im Allgemeinen mit einem kleinen lateinischen Buchstaben.

Jedem x im Definitionsbereich von f wird somit *genau* ein Wert $y \in M_2$ zugeordnet. Der Mathematiker Leonhard Euler hat hierfür die Schreibweise $y = f(x)$ eingeführt. Dabei wird die Variable x als Argument der Funktion f bezeichnet, $y = f(x)$ wird Funktionswert genannt.

Zwei Funktionen sind gleich, wenn sie für jedes $x \in \mathbb{M}_1$ den gleichen Funktionswert $y \in \mathbb{M}_2$ liefern, also $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{M}_1$ gilt.

Ist auch die inverse Abbildung $f_{\mathrm{U}}(x)$ einer Funktion $f(x)$ eindeutig, so nennt man die Funktion $f(x)$ (eindeutig) umkehrbar; die Funktion $f_{\mathrm{U}}(x)$ wird entsprechend als Umkehrfunktion bezeichnet. Sie entspricht der Menge an geordneten Paaren $(y,\, x)$, für die $(x,\, y) \in f$ gilt. Auch in diesem Fall ist der Definitionsbereich der Umkehrfunktion der Wertebereich der ursprünglichen Funktion und umgekehrt.

Funktionen sind insbesondere in der *Analysis* von zentraler Bedeutung.

Relationen

Eine Relation R ist eine Abbildung aus einer Menge $\mathbb{M}$ in die gleiche Menge $\mathbb{M}$. Von besonderer Bedeutung sind zweistellige Relationen, also Teilmengen von $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$.

$$R \subseteq \mathbb{M} \times \mathbb{M}$$

Wenn für ein geordnetes Paar $(x_1,\, x_2) \in R$ gilt, so sagt man, dass x_1 und x_2 in der Relation R zueinander stehen. In mathematischer Form schreibt man:

$$x_1 \; R \; x_2$$

Beispiel:

- Es sei $\mathbb{M} = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$ und R die "Kleiner als"-Relation $<$. Dann gilt:

  $$1 < 2\;;\; 1 < 3\;;\; 1 < 4\;;\; 2 < 3\;;\; 2 < 4\;;\; 3 < 4$$

  Alle durch die "Kleiner als"-Relation verknüpften Zahlen lassen sich als geordnete Paare darstellen:

  $$R = \{(1,2),\, (1,3),\, (1,4),\, (2,3),\, (2,4),\, (3,4)\} \subseteq \mathbb{M} \times \mathbb{M}$$

Nach dem gleichen Prinzip lassen sich auch drei- und mehrstellige Relationen bilden, beispielsweise "x liegt zwischen y und z".[2] Darüber hinaus gelten auch für Relationen die allgemeinen Eigenschaften von Abbildungen; beispielsweise kann eine Relation R mit $(x_1,\, x_2) \in R$ durch Bildung der entsprechenden Paare $(x_2,\, x_1) \in R_{\mathrm{U}}$ invertiert werden. Ebenfalls lassen sich zwei Relationen R_1 und R_2 zu einer einzigen Relation $R_2 \circ R_1$ verketten.

[2] Eine n-stellige Relation entsprechend eine Teilmenge $\mathbb{M}^n = \mathbb{M} \times \mathbb{M} \times \ldots \times \mathbb{M}$.

Reflexivität, Symmetrie und Transitivität

Verschiedene Relationen lassen sich hinsichtlich drei charakteristischer Eigenschaften unterscheiden:

- **Reflexivität:** Eine Relation R in einer Menge $\mathbb{M}$ heißt reflexiv, wenn jedes $x \in \mathbb{M}$ in Relation zu sich selbst steht, also für alle x gilt: $(x, x) \in R$

  Beispiele:

  - Die "Kleiner/Gleich"-Relation $\le$ ist für die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen reflexiv, denn es gilt $x \le x$ für alle $x \in \mathbb{R}$:
  - Die "Kleiner"-Relation $<$ ist, ebenfalls bezogen auf die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, nicht reflexiv.

- **Symmetrie:** Eine Relation R in einer Menge $\mathbb{M}$ heißt symmetrisch, wenn für alle $x_1,\, x_2 \in \mathbb{M}$ aus dem Zutreffen von R auf $(x_1,\, x_2)$ auch das Zutreffen von R auf $(x_2,\, x_1)$ folgt.[3]

  Beispiel:

  - Für alle Geraden g_1 und g_2 ist die Relation "g_1 steht senkrecht auf g_2" symmetrisch.

- **Transitivität:** Eine Relation R in einer Menge M heißt transitiv, wenn für alle $x_1,\, x_2,\, x_3$ aus dem Zutreffen von R auf $(x_1,\, x_2)$ und dem Zutreffen von R auf $(x_2,\, x_3)$ auch das Zutreffen von R auf $(x_1,\, x_3)$ folgt.

  Beispiel:

  - Die Kleiner-Relation $<$ für reelle Zahlen ist transitiv, denn gilt für je drei beliebige reelle Zahlen $x_1 < x_2$ sowie $x_2 < x_3$, so gilt ebenfalls $x_1 < x_3$.

Eine weitere wichtige Eigenschaft vieler Relationen ist die so genannte "Linearität". Eine Relation R in einer Menge $\mathbb{M}$ heißt linear, wenn entweder $x_1 \; R \; x_2$ oder $x_2 \; R \; x_1$ gilt. Ein Beispiel hierfür ist die "Kleiner-Gleich"-Relation $\le$ für reelle Zahlen $\mathbb{R}$, denn es gilt für alle $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$ stets entweder $x_1 \le x_2$ oder $x_2 \le x_1$.

Ordnungs- und Äquivalenzrelationen

Zwei Relationstypen sind in der Mathematik von besonderer Bedeutung:

1.: Ordnungsrelationen:

Es gibt verschiedene Ordnungsrelationen; sie haben gemeinsam, dass sie transitiv sind, unterscheiden sich jedoch in ihren weiteren Eigenschaften.

Beispiel:

[3] Folgt im umgekehrten Fall aus dem Zutreffen von R auf $(x_1,\, x_2)$ das Nicht-Zutreffen von R auf $(x_2,\, x_1)$, so nennt man die Relation antisymmetrisch.

- Eine wichtige Ordnungsrelation ist die so genannte "reflexive Ordnung", beispielsweise die "Kleiner/Gleich"-Relation $\leq$ für die reellen Zahlen. Sie ist reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und linear.[4]

2.: Äquivalenzrelationen:

Äquivalenzrelationen sind Relationen, die sowohl reflexiv als auch symmetrisch und transitiv sind.

Beispiele:

- Die wohl wichtigste Äquivalenzrelation ist die Gleichheit-Relation = ("Identität") zweier reeller Zahlen. Offensichtlich gilt für jede reelle Zahl x: $x = x$ (Reflexivität); gilt zudem für zwei beliebige reelle Zahlen $x_1 = x_2$, so gilt auch $x_2 = x_1$ (Symmetrie); gilt ferner für drei beliebige reelle Zahlen: $x_1 = x_2$ und $x_2 = x_3$, so gilt ebenfalls $x_1 = x_3$ (Transitivität).
- Die Kongruenz- und Ähnlichkeits-Relation zwischen geometrischen Körpern stellen ebenfalls Äquivalenzrelationen dar.

Durch eine Äquivalenz-Relation wird eine Menge $\mathbb{M}$ in unterschiedliche Äquivalenz-Klassen zerlegt.[5] Jedes Element einer solchen Klasse heißt Repräsentant der Klasse und steht mit allen anderen Elementen der Klasse in der Relation R, es gilt also $x_1 \; R \; x_2$ für alle x_1, x_2 einer Äquivalenz-Klasse.[6]

Alle Repräsentanten werden als nicht voneinander verschieden betrachtet, es wird also davon abgesehen, dass sich die Elemente einer Äquivalenz-Klasse in gewissen Eigenschaften unterscheiden. Somit sind Äquivalenzrelationen charakteristisch für mathematische Abstraktionsprozesse: Eine Menge $\mathbb{M}$ kann mit Hilfe einer Äquivalenzrelation R in ein System von Äquivalenz-Klassen zerlegt werden. Diese Klassen treten somit an die Stelle ihrer Repräsentanten, die wiederum anhand ihrer entsprechenden Klasse "identifiziert" werden.

Operationen

Durch eine (zweistellige) Operation werden Elemente $(x_1, \, x_2)$ einer Produkt-Menge $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ in eindeutiger Weise auf je ein Element x der Menge $\mathbb{M}$ abgebildet. Mathematisch schreibt man hierfür:

$$x_1 \, \mathrm{Op} \, x_2 = y \quad \text{oder} \quad \mathrm{Op}(x_1, \, x_2) = y$$

[4] Gilt die Linearität nicht, so spricht man von einer reflexiven Halbordnung. Ein Beispiel hierfür ist die Teilbarkeitsrelation "n_1 teilt n_2" für zwei natürliche Zahlen.

[5] Unter einer Zerlegung einer nichtleeren Menge $\mathbb{M}$ versteht man ein System von nichtleeren, paarweise elementfremden Teilmengen von $\mathbb{M}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{M}$ die Vereinigungsmenge des Systems ist.

Ebenfalls existiert zu jeder Zerlegung einer nichtleeren Menge $\mathbb{M}$ in paarweise elementfremde Teilmengen auch eine Äquivalenz-Relation R, durch die die Zerlegung von $\mathbb{M}$ nach R definiert ist.

[6] Äquivalenz-Klassen reeller Zahlen, die durch Gleichheits-Relation gebildet werden, bestehen jeweils aus genau einer Zahl, da jede Zahl nur mit sich selbst identisch ist. Zahlen können allerdings meist auf unterschiedliche Arten dargestellt werden; beispielsweise gilt $2 = \sqrt{4} = \frac{8}{4} = \ldots$

Allgemein können Äquivalenz-Klassen beliebig viele Elemente beinhalten. Betrachtet man beispielsweise die Menge aller Fahrzeuge und die Relation "hat die gleiche Farbe wie", so beinhalten die Äquivalenzklassen "rot", "grün", "blau", usw. jeweils eine große Anzahl an Fahrzeugen.

Das jeweilige Zeichen Op wird dabei als Operationszeichen (oder kurz “Operator”) bezeichnet, x_1 und x_2 werden Operanden genannt.[7]

Beispiel:

- Durch die Operation der Addition (Operationszeichen: $+$) werden beispielsweise zwei natürliche Zahlen $n_1,\, n_2 \in \mathbb{N}$ auf eine natürliche Zahl $n_3 = n_1 + n_2$ abgebildet.

Nach dem gleichen Prinzip lassen sich auch ein- oder mehrstellige Operationen als eindeutige Abbildungen von Elementen $(x_1,\, x_2,\, \ldots)$ aus $\mathbb{M} \times \mathbb{M} \times \ldots$ auf Elemente $y \in \mathbb{M}$ bilden.

Beispiele:

- Durch die einstellige Operation “Bildung von $(-x)$” wird jede (reelle) Zahl x auf eine gleich große, negative Zahl abgebildet.
- Durch die einstellige Operation “Bildung von $\frac{1}{x}$” wird jede (reelle) Zahl $x \neq 0$ auf den Kehrwert der Zahl abgebildet.

Eine Operation nennt man *unbeschränkt* ausführbar, wenn sie für *alle* Elemente $(x_1,\, x_2,\, \ldots) \in \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2 \times \ldots$ definiert ist; andernfalls nennt man sie beschränkt ausführbar. Im Bereich der natürlichen Zahlen beispielsweise ist die Addition eine unbeschränkt ausführbare, die Subtraktion hingegen eine nur beschränkt ausführbare Operation.

Eigenschaften von Operationen

Operationen können – je nach Operation und zugrunde liegender Menge – verschiedene Eigenschaften besitzen. Im folgenden werden mögliche Eigenschaften von zweistelligen Operationen aufgelistet, die entsprechend auch auf mehrstellige Operationen zutreffen können:

- **Kommutativität:** Eine Operation Op in einer Menge $\mathbb{M}$ heißt kommutativ genau dann, wenn für alle $x_1,\, x_2 \in \mathbb{M}$ gilt:

  $$x_1 \,\mathrm{Op}\, x_2 = x_2 \,\mathrm{Op}\, x_1$$

  Ein Beispiel für eine kommutative Operation ist die Addition in der Menge der natürlichen Zahlen.

- **Assoziativität:** Eine Operation Op in einer Menge $\mathbb{M}$ heißt assoziativ genau dann, wenn für alle $x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{M}$ gilt:

  $$(x_1 \,\mathrm{Op}\, x_2) \,\mathrm{Op}\, x_3 = x_1 \,\mathrm{Op}\, (x_2 \,\mathrm{Op}\, x_3)$$

  Ein Beispiel für eine assoziative Operation ist die Multiplikation in der Menge der reellen Zahlen.

- **Distributivität:** Eine Operation Op_1 heißt in einer Menge $\mathbb{M}$ (linksseitig) distributiv bezüglich Op_2 genau dann, wenn für alle $x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{M}$ gilt:

  $$x_1 \,\mathrm{Op}_1\, (x_2 \,\mathrm{Op}_2\, x_3) = (x_1 \,\mathrm{Op}_1\, x_2) \,\mathrm{Op}_2\, (x_1 \,\mathrm{Op}_1\, x_3)$$

[7] Bei speziellen Operationen haben die Operanden eigene Bezeichnungen; im Term x^n bezeichnet man beispielsweise x als Basis und n als Exponent.

Ein Beispiel für eine distributive Operation mit den zwei Operatoren $\cdot$ und $+$ ist folgende Verknüpfung dreier reeller Zahlen x_1, x_2, x_3:

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$$

Algebraische Strukturen

Fasst man eine Menge $\mathbb{M}$ und eine Relation R zu einem geordneten Paar $[\mathbb{M};\ R]$ zusammen, so wird dadurch dargestellt, dass die Relation R in der Menge $\mathbb{M}$ erklärt ist. Entsprechend bedeutet $[\mathbb{M};\ \mathrm{Op}]$, dass in der Menge $\mathbb{M}$ die Operation Op erklärt ist. In beiden Fällen spricht man von einer (algebraischen) Struktur.

Bildet man nach dem gleichen Prinzip ein geordnetes Paar $[\mathbb{M};\ R_1, \ldots, R_{\mathrm{n}};\ \mathrm{Op}_1, \ldots, \mathrm{Op}_{\mathrm{n}}]$, das aus einer nichtleeren "Trägermenge" $\mathbb{M}$ sowie den Relationen $R_1, \ldots, R_{\mathrm{n}}$ und den Operationen $\mathrm{Op}_1, \ldots, \mathrm{Op}_{\mathrm{n}}$ besteht, so spricht man von einem (algebraischen) Bereich.

Trotz des begrifflichen Unterschieds ist es üblich, einen Bereich und seine Trägermenge mit dem selben Symbol darzustellen. Die wichtigsten Bereiche beziehungsweise Mengen der allgemeinen Mathematik sind:

- $\mathbb{N}$: Die Menge (beziehungsweise der Bereich) der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z}$: Die Menge (beziehungsweise der Bereich) der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$: Die Menge (beziehungsweise der Bereich) der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$: Die Menge (beziehungsweise der Bereich) der reellen Zahlen
- $\mathbb{C}$: Die Menge (beziehungsweise der Bereich) der komplexen Zahlen

Arithmetik

Die Arithmetik ist die “Kunst des Zählens”, also des Rechnens mit Zahlen. Hierzu wurden verschiedene Zahlensysteme und Rechentechniken entwickelt. Ein kleiner, noch immer relevanter Teil dieser Erkenntnisse ist in folgenden Abschnitten zusammengefasst.

Die Einteilung der Zahlen

Natürliche Zahlen

Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, die zum Abzählen von Dingen verwendet werden, bezeichnet man als Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \tag{1}$$

Die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Zahl 0 wird mit dem Symbol $\mathbb{N}^*$ dargestellt.

Ordnung der natürlichen Zahlen

Mit Hilfe der natürlichen Zahlen kann man abzählen wie viele Elemente in einer Menge von Dingen enthalten sind, beispielsweise wie viele Äpfel sich in einer Kiste befinden.[1] Somit ist es auch möglich, die Anzahl an Elementen zweier verschiedener Mengen zu vergleichen, beispielsweise zu prüfen, ob sich in zwei Kisten jeweils gleich viele Äpfel befinden, oder in welcher Kiste mehr Äpfel enthalten sind.

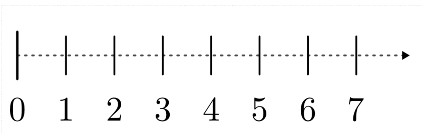


Abb. 8: Der Zahlenstrahl der natürlichen Zahlen.

Die Kisten können somit geordnet, also anhand der Anzahl der darin enthaltenen Äpfel sortiert werden. Als graphische Darstellungsform wird hierfür häufig ein “Zahlenstrahl” gewählt, wobei die Zahlen ihrer Größe nach aufsteigend von links nach rechts angeordnet werden.

[1] Eine Zahl, welche die Mächtigkeit einer endlichen Menge angibt, wird auch als Kardinalzahl bezeichnet.

Rechnen mit natürlichen Zahlen

Jede Menge von Dingen lässt sich durch Hinzufügen weiterer Elemente vergrößern. Rechnerisch entspricht dies einer Addition zweier natürlicher Zahlen. Das Ergebnis einer Addition wird Summe genannt.

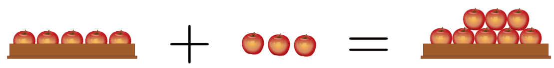


Abb. 9: Beispiel einer einfachen Addition.

Ebenso kann eine Menge an Dingen durch Herausnehmen einzelner Elemente verkleinert werden, mit der Bedingung, dass nicht mehr Elemente aus der Menge herausgenommen werden können als in ihr enthalten sind. Rechnerisch entspricht dies einer Subtraktion zweier natürlicher Zahlen.[2] Das Ergebnis einer Subtraktion wird Differenz genannt.

Abb. 10: Beispiel einer einfachen Subtraktion.

Auch eine Multiplikation zweier natürlicher Zahlen ist stets möglich; sie entspricht rechnerisch einer mehrfachen Ausführung einer Addition. Das Ergebnis, Produkt genannt, ist erneut durch eine natürliche Zahl darstellbar, deren Größe dem jeweiligen Vielfachen der ursprünglichen Zahl entspricht.

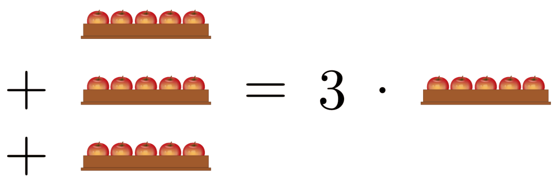


Abb. 11: Beispiel einer einfachen Multiplikation.

Eine Division zweier natürlicher Zahlen, also ein Aufteilen einer Menge von Dingen nur auf mehrere Posten, ergibt ein ganzzahliges Ergebnis genau dann, wenn die Anzahl der Elemente in der Menge einem Vielfachen der Anzahl an Posten entspricht – ansonsten bleibt ein Rest übrig, der sich als Ganzes nicht weiter aufteilen lässt.

[2] Die Subtraktion stellt somit die "Umkehrung" der Addition dar.

Ganze Zahlen

Um auch ein Fehlen an Dingen zahlenmäßig darzustellen, reichen die natürlichen Zahlen nicht aus. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ lässt sich jedoch zur Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitern.

Die ganzen Zahlen als Obermenge der natürlichen Zahlen

Alle natürlichen Zahlen sind als Teilmenge in der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ enthalten. Zusätzlich kommt für jede natürliche Zahl eine entsprechende negative "Gegenzahl" hinzu, die ein Fehlen des entsprechenden Wertes ausdrückt. Zur Darstellung des Falles, dass kein Element vorhanden ist (aber auch keines fehlt), wird die Zahl Null verwendet.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \tag{2}$$

Die ganzen Zahlen lassen sich somit in gleicher Weise wie die natürlichen Zahlen als Zahlenstrahl darstellen. Dabei werden wiederum die einzelnen Zahlen ihrer Größe nach aufsteigend von links nach rechts geordnet.

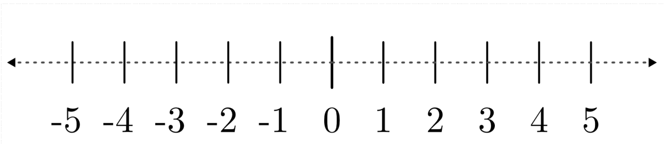


Abb. 12: Der Zahlenstrahl der ganzen Zahlen.

Während bei negativen Zahlen das Minus-Zeichen stets dazu geschrieben werden muss, kann bei positiven Zahlen das Plus-Zeichen weggelassen werden.

Rechnen mit ganzen Zahlen

Durch die Erweiterung der natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen kann mit Hilfe der ganzen Zahlen nicht nur jede Addition und Multiplikation, sondern auch jede Subtraktion uneingeschränkt ausgeführt werden.

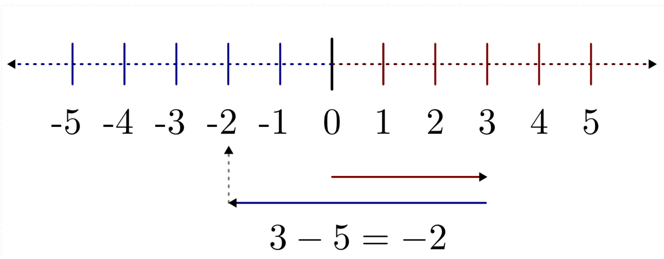


Abb. 13: Beispiel einer Subtraktion am Zahlenstrahl.

Eine veranschaulichende Darstellung von negativen Zahlen ist nicht unmittelbar möglich, da die Anzahl an Elementen einer Menge stets größer oder gleich Null ist – vielmehr lassen sich negative Zahlen als Mengenanzahlen auffassen, die entsprechend große positive Mengenanzahlen auszugleichen vermögen – so wie ein Haufen Erde ein entsprechend großes Erdloch ausfüllen kann.

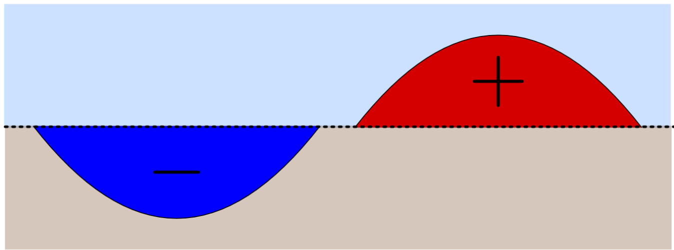


Abb. 14: Bildliche Darstellung einer Subtraktion ganzer Zahlen.

Als Einschränkung bleibt jedoch auch im erweiterten System der ganzen Zahlen bestehen, dass eine Division zweier Zahlen nur dann möglich ist, wenn die erste Zahl (der Dividend) ein ganzzahliges Vielfaches der zweiten Zahl (des Divisors) ist – ansonsten bleibt bei der Division ein nicht weiter teilbarer Rest übrig.

Rationale Zahlen

Rationale Zahlen (manchmal auch "Bruchzahlen" genannt) stellen eine Erweiterung des Zahlenbereichs der ganzen Zahlen dar, um auch eine allgemeine Division zweier (oder mehrerer) Zahlen zu ermöglichen.

Die rationalen Zahlen als Obermenge der ganzen Zahlen

Alle ganzen Zahlen sind als Teilmenge in der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ enthalten. Zusätzlich kommen als weitere Elemente alle Zahlen hinzu, die sich als Bruch zweier ganzer Zahlen m und n darstellen lassen:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{z}{n} \mid z, n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \neq 0\} \tag{3}$$

Die Zahl z oberhalb des Bruchstrichs wird Zähler genannt, die Zahl n unterhalb des Bruchstrichs als Nenner des Bruchs bezeichnet. Die einzige Bedingung liegt darin, dass nicht durch Null geteilt werden darf, also $n \neq 0$ sein muss.[3]

[3] Eine Division durch $n = 0$ ist grundsätzlich unmöglich:

- Gäbe es eine rationale Zahl $q = \frac{z}{n}$ mit $n = 0$ und $z \neq 0$, so müsste ebenfalls $q \cdot n = q \cdot 0 = z$ gelten. Es gilt jedoch für jede beliebige Zahl $q \cdot 0 = 0$ und somit $q \cdot 0 \neq z$.
- Im Fall $n = 0$ und $z = 0$ würde zwar $q \cdot n = q \cdot 0 = 0 = z$ gelten. Hierbei wäre allerdings q nicht eindeutig bestimmt, da $q \cdot 0 = 0$ auf jede beliebige Zahl zutrifft.

Auch die rationalen Zahlen lassen sich ihrer Größe nach als Zahlengerade anordnen; die ganzen Zahlen sind dabei als Teil der rationalen Zahlen an den entsprechenden Stellen eingebettet.[4]

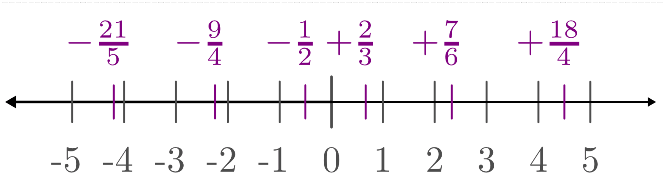


Abb. 15: Der Zahlenstrahl der rationalen Zahlen.

Die rationalen Zahlen liegen "dicht" beieinander, in den "Lücken" zwischen je zwei ganzen Zahlen treten also jeweils unendlich viele als rationale Zahlen darstellbare Werte auf. Anschaulich kann man sich dies dadurch erklären, dass beispielsweise jeder natürlichen Zahl n ein Kehrwert $\frac{1}{n}$ zugeordnet werden kann, für den gilt:

$$\frac{1}{n} \le 1 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Betragsmäßig gilt das gleiche auch für Kehrwerte von negativen Zahlen; hierbei muss lediglich das Vorzeichen beachtet werden.[5]

Erweitern und Vereinfachen von Bruchzahlen

Eine Besonderheit rationaler Zahlen ist es, dass sich ein und die selbe Zahl q durch mehrere gleichwertige Brüche darstellen lässt. Es gilt:

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2} \quad \text{falls} \quad n_1 \cdot z_2 = n_2 \cdot z_1$$

Allgemein kann jede Bruchzahl $q = \frac{z}{n}$ in eine andere, gleich große Bruchzahl umgeformt werden, indem man sowohl den Zähler z als auch den Nenner n mit einer beliebigen ganzen Zahl multipliziert. Diese in der Praxis häufig vorkommende Methode wird als "Erweitern" einer Bruchzahl beziehungsweise eines Bruches bezeichnet.

Beispiele:

[4] Die ganzen Zahlen können als so genannte "Scheinbrüche" aufgefasst werden, d.h. Brüche, deren Nenner n gleich eins ist; für jede ganze Zahl z gilt somit:

$$z = \frac{z}{1}$$

Ein Scheinbruch liegt ebenfalls vor, wenn der Zähler z ein ganzzahliges Vielfaches $n \cdot z$ des Nenners n ist:

$$z = \frac{n \cdot z}{n}$$

[5] Das Minus-Zeichen einer negativen rationalen Zahl wird für gewöhnlich vor den Bruchstrich geschrieben. Es ist allerdings genauso richtig, stattdessen entweder den Zähler *oder* den Nenner mit einem Minus-Zeichen zu versehen:

$$-\frac{z}{n} = \frac{-z}{n} = \frac{z}{-n}$$

Tragen sowohl Zähler als auch Nenner ein Minus-Zeichen, so ist der Wert des Bruches positiv.

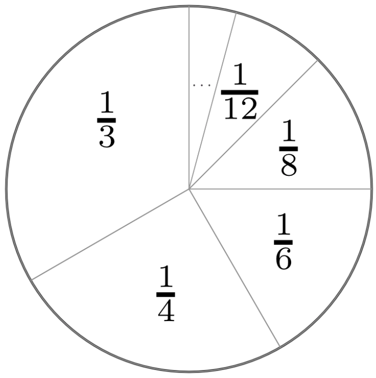


Abb. 16: Darstellung von Stammbrüchen ($1/n$, $n \in \mathbb{N}$) anhand eines Tortendiagramms.

- Anlässlich einer Feier möchte man Tortenstücke verteilen. Soll beispielsweise ein Gast ein Viertel einer Torte bekommen, so kann man dieses ebenso gut halbieren und somit zwei Achtel-Stücke servieren.

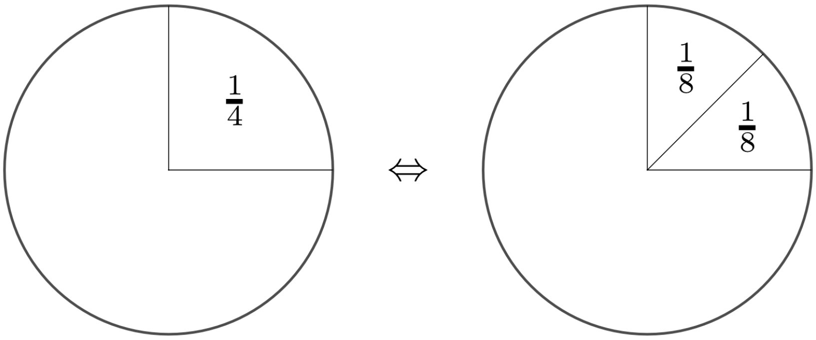


Abb. 17: Kürzen und Erweitern ($\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$) am Beispiel eines Tortendiagramms.

- Die wohl am häufigsten genutzte Umrechnung bezieht sich auf die Umrechnung einer Bruchzahl $q < 1$ in eine wertgleiche Angabe mit dem Nenner 100 ("Einhundertstel" beziehungsweise "Prozent" genannt).
  Ist z.B. $q = \frac{1}{4}$, so können Zähler und Nenner um den Faktor 25 erweitert werden, und man erhält:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100}$$

  Somit entspricht der Bruch $\frac{1}{4}$ der Dezimalzahl $0,25$ beziehungsweise der Prozentangabe 25%.

Im umgekehrten Fall kann eine Bruchzahl, deren Zähler und Nenner (mindestens) einen gemeinsamen Faktor besitzen, zu einer wertgleichen rationalen Zahl vereinfacht werden, indem der gemeinsame Faktor gekürzt wird (beziehungsweise die gemeinsamen Faktoren gekürzt werden).

Beispiel:

- Bei der Bruchzahl $\frac{15}{20}$ enthalten sowohl der Zähler als auch der Nenner den gemeinsamen Faktor 5. Dieser kann "gekürzt" werden:
$$\frac{15}{20} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4}$$
- Bei der Bruchzahl $\frac{30}{60}$ lässt sich der Zähler als Produkt der Faktoren $2 \cdot 3 \cdot 5$, der Nenner als $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ darstellen. Es können somit die Faktoren 2, 3 und 5 (beziehungsweise der Faktor $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$) gekürzt werden:
$$\frac{30}{60} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{2}$$
Derartige Umrechnungen werden beispielsweise bei Zeitangaben genutzt (eine "halbe" Stunde usw).

Runden von Bruchzahlen

Jede rationale Zahl kann durch einen ganzzahligen Anteil und einen Restbruch dargestellt werden, dessen Wert kleiner als eins ist. Soll dieser Restbruch ebenfalls als Dezimalzahl angegeben werden, so können zwei unterschiedliche Fälle auftreten:

- Manche Bruchzahlen lassen sich als Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkomma-Stellen darstellen.

  Beispiel:
$$\frac{1}{16} = 0{,}0625$$
- Manche Bruchzahlen entsprechen einer Dezimalzahl mit einer endlichen Periode. Bei derartigen Zahlen wiederholen sich ab einer bestimmten Stelle eine oder mehrere Nachkomma-Stellen unendlich oft.

  Beispiele:
$$\frac{1}{3} = 0{,}3\bar{3} = 0{,}3333\ldots$$
$$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142\,857} = 0{,}142\,857\,142\,857\ldots$$

Bei der Rechnung mit Dezimalzahlen kann stets nur eine endliche Zahl an Nachkomma-Stellen berücksichtigt werden; rationale Zahlen werden daher entsprechend einer gewünschten Genauigkeit gerundet. Diese Genauigkeit wird durch die Angabe einer bestimmten Anzahl an "zählenden" Ziffern, also Ziffern außer am Anfang oder am Ende stehenden Nullen, festgelegt.

Beispiele:
$$\underbrace{78\,255\,300{,}00}_{\text{10 zählende Ziffern}}$$
$$0{,}000\,\underbrace{420\,8}_{\text{6 zählende Ziffern}}00$$

Übermäßig viele zählende Ziffern täuschen bei Ergebnissen von Messungen oder Schätzungen eine nicht gerechtfertigte Genauigkeit vor. Um dies zu vermeiden, werden die jeweiligen Zahlen auf- beziehungsweise. abgerundet. Hierzu werden zunächst die überflüssigen Ziffern durch Nullen ersetzt. Anschließend wird die letzte nicht überflüssige Ziffer entweder um eins erhöht ("Aufrunden", falls die erste überflüssige Ziffer ≥ 5 ist) oder unverändert gelassen ("Abrunden").

Bei physikalischen Größen wird anhand der Anzahl der zählenden Ziffern implizit auch die Messgenauigkeit angegeben. Beispielsweise weist eine Längenangabe von $2,170\,\mathrm{m}$ auf eine Messgenauigkeit im Millimeter-Bereich hin, während eine Angabe von $2,17\,\mathrm{m}$ nur eine Messgenauigkeit im Zentimeter-Bereich bedeutet.[6]

Um zu große Rundungsfehler zu vermeiden, sollte allerdings bei jeder Rechnung auf ein frühzeitiges Runden verzichtet und das Runden stattdessen erst am Ende (im Ergebnis) durchgeführt werden.

Rechnen mit rationalen Zahlen

Durch die Verwendung rationaler Zahlen lassen sich alle vier Grundrechen-Operationen – abgesehen von der Division durch Null – uneingeschränkt ausführen und beliebig miteinander kombinieren:

- Die Addition zweier rationaler Zahlen q_1 und q_2 ist definiert als:

  $$q_1 + q_2 = \frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2} + \frac{z_2 \cdot n_1}{n_2 \cdot n_1} = \frac{z_1 \cdot n_2 + z_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}$$

  Um zwei rationale Zahlen q_1 und q_2 zu addieren, müssen sie zunächst auf einen gemeinsamen Nenner $n_1 \cdot n_2$ gebracht werden. Beide Zahlen werden hierzu jeweils mit dem Nenner der anderen Zahl erweitert; anschließend werden die (erweiterten) Zähler $z_1 \cdot n_2$ und $z_2 \cdot n_1$ miteinander addiert und auf den gemeinsamen Nenner geschrieben.

- Die Subtraktion zweier rationaler Zahlen funktioniert nach dem gleichen Prinzip wie die Addition, es sind lediglich die Plus-Zeichen durch Minus-Zeichen zu ersetzen:

  $$q_1 - q_2 = \frac{z_1}{n_1} - \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2} - \frac{z_2 \cdot n_1}{n_2 \cdot n_1} = \frac{z_1 \cdot n_2 - z_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}$$

- Die Multiplikation zweier rationaler Zahlen q_1 und q_2 ist definiert als:

  $$q_1 \cdot q_2 = \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1 \cdot z_2}{n_1 \cdot n_2}$$

  Um zwei rationale Zahlen q_1 und q_2 miteinander zu multiplizieren, werden beide Zähler z_1 und z_2 miteinander multipliziert und das Ergebnis $z_1 \cdot z_2$ auf den gemeinsamen Nenner $n_1 \cdot n_2$ geschrieben.

[6] In der Physik richtet sich die Genauigkeitsangabe stets nach der ungenauesten Messung; die Anzahl an zählenden Ziffern des Ergebnisses ist also immer gleich der Anzahl der zählenden Ziffern der ungenauesten Messung beziehungsweise Maßangabe.

- Die Division zweier rationaler Zahlen $q_1 = \frac{z_1}{n_1}$ und $q_2 = \frac{z_2}{n_2}$ entspricht einer Multiplikation der ersten Zahl (des Dividenden) mit dem Kehrbruch der zweiten Zahl (des Divisors). Die Division erfolgt somit nach dem gleichen Prinzip wie die Multiplikation, nur müssen Zähler und Nenner der zweiten Zahl vertauscht werden:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{z_1}{n_1} : \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{n_2}{z_2} = \frac{z_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot z_2}$$

Weitere Hinweise zum Rechnen mit rationalen Zahlen sind im Abschnitt *Bruchrechnung* beschrieben.

Reelle Zahlen

Eine Vielzahl an mathematischen Problemen kann nicht mit Hilfe der rationalen Zahlen gelöst werden. Beispielsweise gibt es keine rationale Zahl x, welche die Gleichung $x^2 = 3$ löst; ebenso gibt es keine rationale Zahl, die das Verhältnis d/l aus der Diagonale eines Quadrates und seiner Seitenlänge beziehungsweise das Verhältnis $u : d$ aus dem Umfang u und dem Durchmesser d eines Kreises ausdrücken könnte. Um derartige "Mängel" zu beseitigen, lässt sich der Bereich der rationalen Zahlen zum Bereich der reellen Zahlen erweitern.

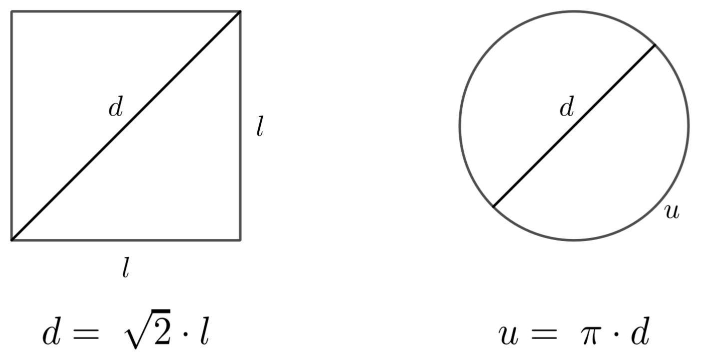


Abb. 18: Anschauliche Beispiele für $\sqrt{2}$ und π als irrationale Zahlen.

Die neu hinzukommenden Zahlen, beispielsweise $\sqrt{2}$, π oder $\sin 20$, werden dabei als "irrationale" Zahlen bezeichnet. Sie lassen sich zwar ihrem Wert nach in den Zahlenstrahl einordnen, lassen sich jedoch durch keine rationale Zahl ausdrücken und besitzen in der Darstellung als Dezimalzahl unendlich viele, nicht periodische Nachkommastellen.

Für zwei besonders wichtige reelle Zahlen werden spezielle Symbole benutzt:

- Die Zahl $\pi = 3,141592653589\ldots$ wird als "Kreiszahl" bezeichnet. Sie gibt den Zusammenhang zwischen dem Durchmesser d und dem Umfang u eines Kreises an:

$$u = \pi \cdot d$$

- Die Zahl $e = 2,718281828459\ldots$ wird als "Eulersche Zahl" bezeichnet. Sie ist in Verbindung mit *Exponentialfunktionen* und *Logarithmen* von besonderer Bedeutung.

Rechnen mit reellen Zahlen

Mit Hilfe der reellen Zahlen lassen sich somit nicht nur alle vier Grundrechenarten – abgesehen von der Division durch Null – uneingeschränkt ausführen; auch das Potenzieren beliebiger und das Wurzelziehen nicht-negativer reeller Zahlen liefert stets eindeutige Ergebnisse.

- Für die Potenz x^n einer reellen Zahl x gilt mit $n \in \mathbb{N}$:

  $$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}$$

  Eine Potenz x^n mit Exponent n entspricht somit einer n-fachen Multiplikation der Grundzahl ("Basis") x mit sich selbst. Das wohl bekannteste Beispiel hierfür sind die so genannten "Zehner-Potenzen" 10^1, 10^2, 10^3, ... Sie lassen sich als Zehner-Stange, Hunderter-Quadrat und Tausender-Würfel darstellen.

- Das Wurzelziehen ("Radizieren") entspricht der Umkehrung des Potenzierens. Für eine beliebige reelle Zahl $a \geq 0$ gelte folgende Gleichung:

  $$a = x^n$$

  Dann ist mit gegebenem $n \in \mathbb{N}$ dem Wert nach genau eine reelle Zahl x bestimmt, welche die Gleichung löst.
  Hierfür schreibt man:[7]

  $$x = \sqrt[n]{a}$$

  Unter der n-ten Wurzel aus einer nicht-negativen Zahl a versteht man somit diejenige Zahl x, deren n-te Potenz gleich a ist.

  Wohl am häufigsten treten die so genannten "Quadrat-Wurzeln" einer Zahl a auf. Hierbei wird diejenige Zahl x gesucht, die, mit sich selbst multipliziert, die Gleichung $x^2 = a$ löst. Beim Ergebnis $x = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ kann der "Wurzelexponent" $n = 2$ weggelassen werden.

Berechnet man Quadrat-, Kubik- und allgemeinen Wurzeln mit Hilfe eines Taschenrechners oder Computers, so werden die häufig irrationalen Ergebnisse in gleicher Weise wie beim *Runden von Bruchzahlen* entsprechend der möglichen Anzeige-Genauigkeit gerundet.

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen stellen eine Erweiterung des Zahlenbereichs der reellen Zahlen dar. Grundlegend hierfür waren Überlegungen von Gerolamo Cardano und Rafael Bombelli, auf welche Weise sich Wurzeln negativer Zahlen definieren ließen.

[7] Genau genommen gilt dies nur, wenn n eine ungerade Zahl ist. Für Wurzeln mit geradzahligen n erfüllt neben $x = \sqrt[n]{a}$ auch $x = -\sqrt[n]{a}$ die Bedingung $a = x^n$. In diesem Fall heben sich beim Potenzieren, d.h. beim mehrfachen Multiplizieren, die negativen Vorzeichen paarweise gegenseitig auf. (Siehe auch *Rechenregeln für Potenzen*)

Der so geschaffene Zahlenbereich $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen hat sich für vielerlei Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften als äußerst nützlich erwiesen. Eine komplexe Zahl lässt sich allerdings nicht mehr durch eine einzelne Zahl darstellen, sondern bildet vielmehr ein geordnetes Paar (a, b) eines zweidimensionalen Vektorraums.

Da komplexe Zahlen in den derzeitigen Lehrplänen keine Beachtung finden, wird an dieser Stelle für interessierte Leser lediglich auf den *Exkurs: Komplexe Zahlen* verwiesen.

Grundrechenarten und Rechenregeln

Ziffern und Zahlen im Dezimalsystem

Im so genannten "Dezimalsystem" werden Zahlen durch die Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ repräsentiert. Um beliebig große Zahlen mit nur diesen zehn Ziffern darstellen zu können, besitzt jede Ziffer neben ihrem eigentlichen Wert auch einen bestimmten Stellenwert. Der tatsächliche Wert einer Ziffer entspricht damit ihrem Eigenwert multipliziert mit ihrem Stellenwert.

Die Zahlen 1, 10, 100, 1000 beziehungsweise $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ usw. werden als Stufenzahlen oder Zehnerpotenzen bezeichnet. Mit ihrer Hilfe lässt sich jede Zahl eindeutig als Summe von Vielfachen der Stufenzahlen schreiben.

Zahlenbeispiel: $4\,538$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Die Ziffer 8 hat den Wert} & 8 \cdot & 1 = & 8 \\
\text{Die Ziffer 3 hat den Wert} & 3 \cdot & 10 = & 30 \\
\text{Die Ziffer 5 hat den Wert} & 5 \cdot & 100 = & 500 \\
\text{Die Ziffer 4 hat den Wert} & 4 \cdot & 1\,000 = & 4\,000
\end{array}$$

Abb. 19: Ziffern als Repräsentanten von Zahlenwerten.

In der Dezimal-Schreibweise wird bei der Darstellung großer Zahlen nach den Ziffern für $1\,000$, $1\,000\,000$, $1\,000\,000$ usw. nach Möglichkeit je ein kleiner Zwischenraum eingefügt, um die Lesbarkeit zu erhöhen. Ziffern mit einer Wertigkeit kleiner als Eins werden im deutschen Sprachraum mit einem Komma, im Englischen mit einem Punkt von den übrigen getrennt.

Die vier Grundrechenarten

Mathematik ist die Wissenschaft der Zahlen. Die mathematischen Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division stellen im alltäglichen Leben die wohl gebräuchlichsten Verknüpfungen von Zahlen dar; sie werden daher auch als Grundrechenarten bezeichnet.

Die Addition

Werden zwei Zahlen oder Terme mit einem Pluszeichen verbunden, so bezeichnet man den Rechenausdruck als Summe. Die einzelnen Zahlen, die addiert werden, heißen Summanden.

Ohne Computer oder Taschenrechner lassen sich Zahlen am einfachsten addieren, indem sie untereinander geschrieben werden. Dabei müssen die Ziffern mit gleicher Wertigkeit (Einer, Zehner Hunderter usw.) immer genau untereinander stehen. Anschließend werden spaltenweise von rechts nach links die Ziffern der einzelnen Summanden addiert. Treten dabei Werte größer als Zehn auf, so wird nur die Einerstelle der jeweiligen Summe unter den Strich geschrieben, die Zehnerstelle wird als "Übertrag" in die nächste Ziffernstelle übernommen.[1]

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 1\,6\,8\,3 \\ +\;\;7\,4\,8 \\ \hline 2\,4\,3\,1 \end{array}$$

Abb. 20: Beispiel einer schriftlichen Addition.

Der Grundgedanke hierbei besteht darin, dass jeweils zehn "Einer" mit einem "Zehner", zehn "Zehner" mit einem "Hunderter" usw. gleichwertig sind. Bei der Addition der einzelnen Stellenwerte kann man somit jeweils zehn Repräsentanten einer Wertigkeit durch einen Repräsentanten der nächst höheren Wertigkeit ersetzen und diesen zur Addition des nächsten Stellenwertes hinzunehmen.

Die Subtraktion

Werden zwei Zahlen oder Terme mit einem Minuszeichen verbunden, so bezeichnet man den Rechenausdruck als Differenz. Vor dem Minuszeichen steht der Minuend, dahinter der Subtrahend.

Auch bei der schriftlichen Subtraktion werden die Ziffern mit gleicher Wertigkeit jeweils untereinander geschrieben. Anschließend werden spaltenweise von rechts nach links die Ziffern des Subtrahenden von der jeweiligen Ziffer des Minuenden subtrahiert. Ist dabei die Ziffer des Minuenden kleiner als die des Subtrahenden, so wird die Ziffer des Minuenden um 10 erhöht und der so gebildete Differenzwert unter den Strich geschrieben. Der "Übertrag" lässt sich dadurch ausgleichen, indem die nächste, um das 10-fache größere Ziffer des Minuenden um Eins erniedrigt wird.[2]

[1] Der Übertrag kann wahlweise über den ersten Summanden oder direkt über den Bruchstrich geschrieben werden. Letztere Schreibweise wird bevorzugt, wenn auf diese Weise mehr als zwei Zahlen addiert werden.

[2] Alternativ zur Erniedrigung der nächst größeren Ziffer des Minuenden kann der Übertrag auch dadurch berücksichtigt werden, dass die nächst größere Ziffer des Subtrahenden um Eins erhöht wird.

Sollen mehrere Zahlen auf einmal vom Minuenden subtrahiert werden, so kann man die einzelnen Subtrahenden – Ziffer für Ziffer – zunächst aufaddieren, um sie dann als Summe vom Minuenden abzuziehen.

$$
\begin{array}{r}
\color{red}{1}\color{red}{1} \\
1683 \\
-\ \ 748 \\ \hline
935
\end{array}
$$

Abb. 21: Beispiel einer schriftlichen Subtraktion.

Der Grundgedanke hierbei besteht wiederum darin, dass jeweils ein “Zehner” mit zehn “Einern”, ein “Hunderter” mit zehn “Zehnern” usw. gleichwertig ist. Bei der Subtraktion der einzelnen Stellenwerte kann man somit im Minuenden jeweils einen Repräsentanten einer Wertigkeit durch zehn Repräsentanten der nächst niedrigeren Wertigkeit ersetzen.

Die Multiplikation

Werden zwei Zahlen oder Terme mit einem Malzeichen verbunden, so bezeichnet man den Rechenausdruck als Produkt. Die einzelnen Zahlen beziehungsweise Terme, die miteinander multipliziert werden, heißen Faktoren.

Bei einer schriftlichen Multiplikation wird der erste Faktor spaltenweise von rechts mit allen Ziffern des zweiten Faktors multipliziert. An jedes so gebildete Teilergebnis wird dabei eine Anzahl an Nullen angehängt, die der Summe an Nullen beider Ziffernwertigkeiten entspricht. Die einzelnen Teilergebnisse werden gemäß ihrer Wertigkeiten untereinander geschrieben und aufaddiert.

$$
\begin{array}{lrl}
 & 1683 & \\
 & \cdot\ \ 748 & \\ \cline{2-2}
 & \left.\begin{array}{r} 24 \\ 120 \\ 2100 \end{array}\right\} & 3 \cdot 748 = 2\,244 \\
 & \left.\begin{array}{r} 640 \\ 3200 \\ 56000 \end{array}\right\} & 80 \cdot 748 = 59\,840 \\
 & \left.\begin{array}{r} 4800 \\ 24000 \\ 420000 \end{array}\right\} & 600 \cdot 748 = 448\,800 \\
 & \left.\begin{array}{r} 8000 \\ 40000 \\ 700000 \end{array}\right\} & 1\,000 \cdot 748 = 748\,000 \\
 & \color{green}{1121} & \\ \hline
 & 1258884 &
\end{array}
$$

Abb. 22: Beispiel einer schriftlichen Multiplikation.

Der Grundgedanke dieser Rechenmethode liegt darin, dass es sich bei jeder Multiplikation um eine mehrfache Addition handelt. In gleicher Weise, wie man sich eine einzelne Zahl anhand ihrer Ziffern aus den jeweiligen Vielfachen der Stufenzahlen aufgebaut denken kann, kann man sich auch jedes Produkt zweier Zahlen als Summe einzelner Teilfaktoren vorstellen.

Die Division

Werden zwei Zahlen oder Terme mit einem Geteilt-Zeichen verbunden, so bezeichnet man den Rechenausdruck als Division. Vor dem Geteilt-Zeichen steht der Dividend, dahinter der Divisor. Für das Geteilt-Zeichen gibt es mehrere gleichwertige Schreibweisen:

$$a_1 : a_2 \;=\; a_1/a_2 \;=\; \frac{a_1}{a_2}$$

Bei einer schriftlichen Division werden der Dividend, der Divisor und das zu berechnende Ergebnis in eine Zeile geschrieben. Zunächst werden nur (von links nach rechts) die ersten n Ziffern des Dividenden betrachtet, so dass die sich aus den n Ziffern ergebende Zahl größer ist als der Divisor. Durch Abschätzen wird ermittelt, welchem ganzzahligen Vielfachen des Divisors – abgesehen von einem später noch zu bestimmenden Rest – die ausgewählte, n-stellige Zahl entspricht. Mit diesem Vielfachen, das die erste Ergebnis-Ziffer darstellt, wird der Divisor anschließend multipliziert und das erhaltene Ergebnis von der n-stelligen Zahl subtrahiert. Übrig bleibt hierbei ein bestimmter Teilungsrest. Zu diesem Rest können nach dem gleichen Schema weitere Ziffern des Dividenden hinzugenommen und die Division nach der gleichen Rechenmethode fortgesetzt werden.

$$\begin{array}{r}
1\,6\,8\,3{,}0\,0 \;:\; 7\,4\,8 \;=\; 2{,}2\,5 \\
\underline{-\,1\,4\,9\,6}\phantom{{,}0\,0} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
1\,8\,7\,0 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\underline{-\,1\,4\,9\,6} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
3\,7\,4\,0 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\underline{-\,3\,7\,4\,0} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
0 \qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}$$

Abb. 23: Beispiel einer schriftlichen Division.

Durch die Verwendung von Taschenrechnern und Computern werden die schriftliche Multiplikation und Division im alltäglichen Leben kaum noch angewendet. Das Rechenschema der schriftlichen Division ist allerdings für die Methode der *Polynom-Division* in der Analysis und Algebra von Bedeutung.

Klammern und Reihenfolge der Auswertung

Die vier Grundrechenarten sind als Operatoren für jeweils zwei Operanden festgelegt. Sollen drei oder mehr Zahlen durch die vier Grundrechenarten verknüpft werden, so kann dies nur schrittweise erfolgen.

Die Reihenfolge, in der die einzelnen Operationen ausgeführt werden müssen, ist durch Vorrang-Regeln sowie durch die Verwendung von Klammern festgelegt:

1. Was in Klammern steht, wird zuerst ausgewertet (bei Zahlen) beziehungsweise zusammengefasst (bei Variablen).
2. Ist durch Klammern keine andere Reihenfolge der Auswertung festgelegt, so werden zunächst die Rechenoperatoren der dritten Stufe (Potenzen und Wurzeln) ausgewertet.

3. Als nächstes werden die Rechenoperatoren der zweiten Stufe (Multiplikation und Division) ausgewertet.
4. Zuletzt werden die Rechenoperationen der ersten Stufe (Addition und Multiplikation) ausgeführt.

Durch das Setzen von Klammern kann somit eine von der üblichen Regel "(Hoch vor) Punkt vor Strich" abweichende Reihenfolge der Auswertung erreicht werden. In allgemeiner Form kann die Auswertungsreihenfolge somit als "Klammer vor Hoch vor Punkt vor Strich" zusammengefasst werden. Die Rechenoperationen gleicher Stufe werden dabei von links nach rechts ausgeführt.

Bei der Verwendung von Klammern sind folgende Regeln zu beachten:

- Klammern treten stets paarweise auf ("Klammer auf, Klammer zu")
- Mehrere Klammern können ineinander verschachtelt, niemals jedoch überlappend auftreten.
- Zur besseren Lesbarkeit werden oftmals verschiedene Klammer-Symbole verwendet:

$$\Big\langle \ldots \Big\{ \ldots \Big[\ldots \Big(\quad \ldots \quad \Big) \ldots \Big] \ldots \Big\} \ldots \Big\rangle$$

  Als Alternative dazu können Klammern unterschiedlicher Größe genutzt werden:

$$\Bigg(\ldots \bigg(\ldots \Big(\ldots \big(\ldots (\ldots) \ldots \big) \ldots \Big) \ldots \bigg) \ldots \Bigg)$$

In manchen Fällen kann ein Term durch das Auflösen einer Klammer vereinfacht werden – insbesondere wenn sich verschiedene Terme dadurch leichter zusammenzählen lassen oder sich gegenseitig aufheben (zu Null addieren). Hierzu muss das vor der Klammer stehende Rechenzeichen auf alle Glieder der Klammer angewendet werden. Es gelten damit folgende Regeln:

- Steht vor einer Klammer ein Pluszeichen $(+)$, so kann die Klammer ohne Änderung der Rechenzeichen innerhalb der Klammer weggelassen werden. Somit gilt:

$$\begin{aligned} +(+a) &= +a \\ +(-a) &= -a \end{aligned} \tag{4}$$

- Steht vor einer Klammer ein Minuszeichen $(-)$, so werden alle additiven Rechenzeichen in der Klammer in die jeweils entgegengesetzten umgewandelt (Plus wird zu Minus und umgekehrt).

$$\begin{aligned} -(+a) &= -a \\ -(-a) &= +a \end{aligned} \tag{5}$$

Klammern finden insbesondere dann Anwendung, wenn sowohl additive wie auch multiplikative Terme miteinander kombiniert werden. Die dafür wesentlichen Rechenregeln sind im nächsten Abschnitt zusammengefasst.

Rechengesetze für die Grundrechenarten

Häufig muss man bei mathematischen Aufgaben Terme aus Zahlen und/oder Variablen auswerten, welche durch die vier Grundrechenarten verknüpft sind. Zur Vereinfachung können dabei bestimmte Umformungen vorgenommen werden, die für beliebige Variablenwerte aus dem Definitionsbereich stets unveränderte Ergebniswerte liefern. Die drei wichtigsten dieser Rechenregeln werden als Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz bezeichnet.

Das Kommutativgesetz

Bei der Addition und der Multiplikation können die einzelnen Summanden beziehungsweise Faktoren miteinander vertauscht werden. Es gelten somit folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a_2 + a_1 \\ a_1 \cdot a_2 &= a_2 \cdot a_1 \end{aligned} \tag{6}$$

Die Subtraktion und die Division sind nicht kommutativ.

Das Assoziativgesetz

Bei der Addition von mehr als zwei Summanden oder einer Multiplikation mehrerer Faktoren können die Summen- beziehungsweise Produktglieder beliebig durch Klammern gruppiert werden. Es gilt somit:

$$\begin{aligned} a_1 + (a_2 + a_3) &= (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) &= (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \end{aligned} \tag{7}$$

Das Assoziativgesetz gilt in entsprechender Form auch für die Subtraktion und die Division.[3]

[3] Für das Assoziativgesetz bzgl. der Addition und Subtraktion gilt:

$$\begin{aligned} a_1 + (a_2 + a_3) &= (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + (a_2 - a_3) &= (a_1 + a_2) - a_3 = a_1 + a_2 - a_3 \\ a_1 - (a_2 + a_3) &= (a_1 - a_2) - a_3 = a_1 - a_2 - a_3 \\ a_1 - (a_2 - a_3) &= (a_1 - a_2) + a_3 = a_1 - a_2 + a_3 \end{aligned}$$

Für Multiplikations- und Divisionsklammern, d.h. Klammern in denen nur Mal- und Geteiltzeichen, aber keine Additions- und Subtraktionszeichen als Rechenoperatoren vorkommen, gilt das Assoziativgesetz in folgender Form:

- Steht vor einer Multiplikations- beziehungsweise Divisionsklammer ein Malzeichen $(\cdot)$, so kann die Klammer ohne Änderung der Rechenzeichen in der Klammer weggelassen werden.

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) &= (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \\ a_1 \cdot (a_2 : a_3) &= (a_1 \cdot a_2) : a_3 = a_1 \cdot a_2 : a_3 \end{aligned}$$

Das Distributivgesetz

Treten Addition und Multiplikation gemeinsam auf, so gelten folgende Verknüpfungsregeln:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (a_2 + a_3) &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 \\ (a_2 + a_3) \cdot a_1 &= a_2 \cdot a_1 + a_3 \cdot a_1 \end{aligned} \tag{8}$$

Ist ein Summenterm mit einem Faktor zu multiplizieren, so kann man jeden Summanden einzeln mit dem Faktor multiplizieren und anschließend beide Produkte addieren. Die Reihenfolge der Faktoren beziehungsweise Summanden spielt dabei gemäß dem Kommutativgesetz (6) keine Rolle.

Besitzen im umgekehrten Fall alle Summanden einer Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann dieser gemäß der obigen Gleichung "ausgeklammert" werden. Dieser Rechentrick, auch als "Faktorisierung" einer Summe bezeichnet, wird insbesondere bei der Rechnung mit Brüchen häufig angewendet.

Das Distributivgesetz gilt in entsprechender Form auch für die Subtraktion und die Division.[4]

Binomische Formeln

Sollen zwei in Klammern stehende Summenterme miteinander multipliziert werden, so kann ebenfalls das Distributivgesetz angewendet werden. Jeder Summand des ersten Terms ist dabei mit jedem Summanden des zweiten Terms (unter Berücksichtigung des Vorzeichens) zu multiplizieren. Beispielsweise gilt:

$$(a_1 + a_2) \cdot (a_3 + a_4) = a_1 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4$$

- Steht vor einer Multiplikations- beziehungsweise Divisionsklammer ein Divisionszeichen (:), so kann die Klammer weggelassen werden, wenn alle Rechenzeichen in die entgegengesetzten umgewandelt werden (hierbei ist "Mal" durch "Geteilt" und "Geteilt" durch "Mal" zu ersetzen).

$$\begin{aligned} a_1 : (a_2 \cdot a_3) &= (a_1 : a_2) : a_3 = a_1 : a_2 : a_3 \\ a_1 : (a_2 : a_3) &= (a_1 : a_2) \cdot a_3 = a_1 : a_2 \cdot a_3 \end{aligned}$$

In jedem Fall muss darauf geachtet werden, dass nicht durch Null dividiert wird. Bei den letzten drei Gleichungen muss daher die Bedingung $a_3 \neq 0$ eingehalten werden, in den letzten beiden muss zusätzlich $a_2 \neq 0$ gelten.

[4] Für die Kombination der Subtraktion und Multiplikation gilt das Distributivgesetz in folgender Form:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (a_2 - a_3) &= a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3 \\ (a_2 - a_3) \cdot a_1 &= a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_1 \end{aligned}$$

Für die Kombination der Addition oder Subtraktion mit der Division gilt (jeweils mit $a_1 \neq 0$):

$$\begin{aligned} (a_2 + a_3) : a_1 &= a_2 : a_1 + a_3 : a_1 \\ (a_2 - a_3) : a_1 &= a_2 : a_1 - a_3 : a_1 \end{aligned}$$

Bestehen die zu multiplizierenden Summenterme wie im obigen Beispiel aus jeweils zwei Summanden, so werden sie als Binome bezeichnet. Für sie gelten folgende, für vielerlei Aufgaben nützliche "binomische Formeln":

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2)^2 &= (a_1 + a_2) \cdot (a_1 + a_2) = a^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_2^2 \\ (a_1 - a_2)^2 &= (a_1 - a_2) \cdot (a_1 - a_2) = a^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_2^2 \\ (a_1 + a_2) \cdot (a_1 - a_2) &= a_1^2 - a_2^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Für höhere Potenzen kann mit Hilfe des *Summenzeichens* und des so genannten *Binomialkoeffizienten* eine allgemeine binomische Formel angegeben werden:

$$(a_1 + a_2)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a_1^{(n-i)} \cdot a_2^i$$

Für $(a_1 - a_2)^n$ wechseln sich die Vorzeichen der einzelnen Produkte ab. Dies kann in der obigen Formel durch einen Faktor $(-1)^i$ berücksichtigt werden, der je nach Wert der Indexvariablen i ein positives oder negatives Vorzeichen liefert. Somit gilt:

$$(a_1 - a_2)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot a_1^{(n-i)} \cdot a_2^i$$

Beträge und Einheiten

Der Betrag $|a|$ einer Zahl ist die nicht-negative der beiden Zahlen a und $-a$:

$$|a| = \begin{cases} +a & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Anschaulich entspricht der Betrag $|a|$ einer Zahl a dem Abstand zwischen 0 und a auf der Zahlengeraden.

Rechnen mit Beträgen

Da Beträge letztlich nichts anderes sind als positive reelle Zahlen, können sie beliebig mit den vier Grundrechenarten verknüpft werden. Für die Beträge von Produkten und Quotienten gelten dabei folgende Rechenregeln:

$$|a_1 \cdot a_2| = |a_1| \cdot |a_2|$$
$$|a_1 : a_2| = |a_1| : |a_2|$$

Die Gleichung $|a_1 + a_2| = |a_1| + |a_2|$ gilt nicht allgemein, sondern nur dann, wenn a_1 und a_2 das gleiche Vorzeichen besitzen; andernfalls ist der Betrag der Summen $|a_1 + a_2|$ kleiner als die Summe der Beträge $|a_1| + |a_2|$. Beide Fälle lassen sich durch folgende Ungleichung beschreiben:

$$|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|$$

Häufig ist auch der Differenzbetrag zweier Zahlen a_1 und a_2 von Interesse, d.h. der Abstand $|a_2 - a_1|$ zwischen a_1 und a_2 auf der Zahlengeraden. Der Differenzbetrag entspricht somit der Differenz beider Zahlen ohne Berücksichtigung des Vorzeichens. Hierbei gilt:

$$|a_1 - a_2| = |a_2 - a_1|$$

Rechnen mit Einheiten

In anwendungsorientierten Aufgaben muss meist nicht nur mit Zahlen, sondern auch mit (physikalischen) Größen gerechnet werden. Diese haben in den meisten Fällen nicht nur einen bestimmten Betrag beziehungsweise Zahlenwert, sondern auch eine bestimmte Einheit.

$$\text{Größe} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit}$$

Wird in einer Gleichung mit Größen gerechnet, so müssen sich die jeweiligen Einheiten auf beiden Seiten der Gleichung stets entsprechen. Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

- Identische Größen haben im allgemeinen Sprachgebrauch teilweise unterschiedliche Bezeichnungen. Auch hierbei sind die jeweiligen Umrechnungsfaktoren zu berücksichtigen.

  Beispiele:

  $$1\,\text{Liter} = 1\,\text{Kubikdezimeter}$$

  $$1\,\text{Tonne} = 1\,000\,\text{Kilogramm}$$

- Durch Verwendung von Zehnerpotenzen beziehungsweise den entsprechenden "Vorsätzen" (Kilo-, Mega-, Giga- beziehungsweise Zenti-, Mili-, Mikro- usw.) lassen sich Einheiten oftmals "einfacher" darstellen. Dabei müssen die Zahlenwerte der Einheiten entsprechend angepasst werden.

  Beispiele:

  $$1\,\text{m} = 100\,\text{cm} = 1\,000\,\text{mm}$$

  $$1\,\text{MW} = 1\,000\,\text{kW} = 1\,000\,000\,\text{W}$$

Bruchrechnung

Für das Rechnen mit Bruchtermen gelten prinzipiell die gleichen Regeln wie für das Rechnen mit Bruchzahlen. Als Besonderheit ist allerdings stets darauf zu achten, dass der Nenner des Bruchs nicht den Wert Null annehmen darf, da eine Division durch Null nicht definiert ist. Diese Bedingung lässt sich gegebenenfalls durch eine Beschränkung des Definitionsbereichs der im Nenner auftretenden Variablen erreichen.

Erweitern und Vereinfachen

Ein Bruchterm $\frac{z}{n}$ lässt sich jederzeit erweitern, indem sowohl der Zähler z wie auch der Nenner n mit dem gleichen Faktor $c \neq 0$ multipliziert werden. Es gilt somit:

$$\frac{z}{n} = \frac{c \cdot z}{c \cdot n}$$

Ein Bruchterm lässt sich ebenso in umgekehrter Weise vereinfachen ("kürzen"), wenn sowohl der Zählerterm wie auch der Nennerterm einen gleichen Faktor c (oder mehrere gleiche Faktoren c_1, c_2 usw.) beinhalten.

Beispiele:

$$\frac{3 \cdot a^2 \cdot b}{9 \cdot b^3} = \frac{3 \cdot b \cdot \ \ a^2}{3 \cdot b \cdot 3 \cdot b^2} = \frac{a^2}{3 \cdot b^2}$$

$$\frac{a^2 - 1}{(a+1)^2} = \frac{(a+1) \cdot (a-1)}{(a+1) \cdot (a+1)} = \frac{(a-1)}{(a+1)}$$

Besteht der Zähler und/oder der Nenner eines Bruchterms aus einer Summe von Termen, so ist ein Kürzen nicht unmittelbar möglich; vielmehr müssen der Zähler wie auch der Nenner jeweils vollständig in einzelne Faktoren zerlegt werden. Hierbei können insbesondere das *Distributivgesetzes* sowie *binomische Formeln* hilfreich sein:

- Nach dem Distributivgesetz kann ein in allen Summanden des Zählers und/oder des Nenners auftretender Faktor ausgeklammert werden. Eine Summe kann damit als Produkt zweier Faktoren geschrieben werden.
- Jede Summe $a + b$ kann, sofern man sie in Klammern setzt, ebenfalls als einzelner Faktor $1 \cdot (a + b)$ angesehen werden.[1] Somit gilt beispielsweise:

  $$\frac{x+1}{2 \cdot x + 2} = \frac{1 \cdot (x+1)}{2 \cdot (x+1)} = \frac{1}{2}$$

- Entspricht der Zähler und/oder Nenner eines Bruches (oder zumindest einer der auftretenden Faktoren) dem Ergebnis einer binomischen Formel, so kann diese angewendet werden, um eine weitere Faktorisierung zu erreichen.

Ein Bruchterm, der zum Schluss einer Rechnung ein Endergebnis darstellt, wird üblicherweise in einer so weit wie möglich gekürzten Form angegeben.

Rechenregeln für Bruchterme

Da bei der Rechnung mit Bruchtermen üblicherweise mit reellen Zahlen oder entsprechenden Variablen gerechnet wird, gelten die drei *Rechengesetze für Grundrechenarten* in gleicher Form auch für Bruchterme. Als Besonderheit muss dabei stets darauf geachtet werden, dass der Nennerterm nicht den Wert Null annehmen darf.

Für n_1, n_2, $n_3 \neq 0$ gilt:

[1] Hier wird wiederum das Distributivgesetz genutzt: Da für jede reelle Zahl a die Beziehung $a = 1 \cdot a$ gilt, kann die 1 jederzeit als gemeinsamer Faktor einer beliebigen Summe ausgeklammert werden.

- Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2} &= \frac{z_2}{n_2} + \frac{z_1}{n_1} \\ \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} &= \frac{z_2}{n_2} \cdot \frac{z_1}{n_1} \end{aligned}$$

- Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{n_1} + \left(\frac{z_2}{n_2} + \frac{z_3}{n_3} \right) &= \left(\frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2} \right) + \frac{z_3}{n_3} \\ \frac{z_1}{n_1} \cdot \left(\frac{z_2}{n_2} \cdot \frac{z_3}{n_3} \right) &= \left(\frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} \right) \cdot \frac{z_3}{n_3} \end{aligned}$$

- Distributivgesetz:

$$\frac{z_1}{n_1} \cdot \left(\frac{z_2}{n_2} + \frac{z_3}{n_3} \right) = \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} + \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_3}{n_3} = \left(\frac{z_2}{n_2} + \frac{z_3}{n_3} \right) \cdot \frac{z_1}{n_1}$$

Auf weitere Besonderheiten, die sich bei der Verknüpfung von Bruchtermen durch die vier Grundrechenarten ergeben, wird in den folgenden Abschnitten näher eingegangen.

Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Zwei Brüche lassen sich bei einer Addition oder Subtraktion nur dann direkt zusammenfassen, wenn sie "gleichnamig" sind, d.h. den gleichen Nenner besitzen. Dabei werden die Zählerterme addiert, der Nennerterm bleibt unverändert:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n} &= \frac{z_1 + z_2}{n} \\ \frac{z_1}{n} - \frac{z_2}{n} &= \frac{z_1 - z_2}{n} \end{aligned} \tag{10}$$

Haben Brüche unterschiedliche Nennerterme, so müssen alle Brüche zunächst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden, bevor eine Addition beziehungsweise Subtraktion möglich ist. Hierzu empfiehlt es sich, zunächst die Nennerterme vollständig in einzelne Faktoren zu zerlegen. Von jedem Faktor, der in mindestens einem der Nenner vorkommt, wählt man anschließend die jeweils höchste Potenz aus und multipliziert diese Faktoren miteinander. Auf diese Weise erhält man das kleinste gemeinsame Vielfache der Nennerterme (kgV), das auch als "Hauptnenner" bezeichnet wird.

Beispiele:

- Entsprechen die Nenner dreier Brüche den Zahlen 20, 30 und 45 so lautet der Hauptnenner:

$$\begin{aligned} 20 &= 2^2 & & & \cdot\ 5 \\ 30 &= 2 & \cdot\ 3 & & \cdot\ 5 \\ 45 &= & \cdot\ 3^2 & & \cdot\ 5 \\ \text{kgV} &= 2^2 & \cdot\ 3^2 & & \cdot\ 5 \ = \ 180 \end{aligned}$$

Bei einem Ausmultiplizieren der einzelnen Zahlen ohne Faktorisierung und Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen würde sich ein gemeinsamer Nenner von $20 \cdot 30 \cdot 45 = 27\,000$ ergeben.

- Entsprechen die Nenner den Termen $(2 \cdot a - 3)$, $(4 \cdot a^2 - 6 \cdot a)$ und $(4 \cdot a^2 - 9)$ so lautet der Hauptnenner:

$$\begin{aligned}
(2 \cdot a - 3) &= \qquad\quad (2 \cdot a - 3) \\
(4 \cdot a^2 - 6 \cdot a) &= 2 \cdot a \cdot (2 \cdot a - 3) \\
(4 \cdot a^2 - 9) &= \qquad\quad (2 \cdot a - 3) \cdot (2 \cdot a + 3) \\
\text{kgV} &= 2 \cdot a \cdot (2 \cdot a - 3) \cdot (2 \cdot a + 3) = 8 \cdot a^3 - 18 \cdot a
\end{aligned}$$

Bei einem Ausmultiplizieren der einzelnen Terme ohne Faktorisierung und Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen würde sich ein gemeinsamer Nenner von $32 \cdot a^5 - 96 \cdot a^4 + 216 \cdot a^2 - 162 \cdot a$ ergeben.

Die zu addierenden Brüche können anschließend um die fehlenden Faktoren erweitert und die Zählerterme nach obiger Gleichung addiert werden.

Multiplikation und Division von Bruchtermen

Bruchterme lassen sich miteinander multiplizieren, indem man sowohl ihre Zähler als auch ihre Nenner miteinander multipliziert:[2]

$$\frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1 \cdot z_2}{n_1 \cdot n_2} \tag{11}$$

Um das Ergebnis in einer möglichst vereinfachten Form vorliegen zu haben, ist es (vor dem Ausmultiplizieren) sinnvoll, sowohl die Zähler wie auch die Nenner beider Brüche vollständig in Faktoren zu zerlegen. Kürzt man im Zähler und Nenner anschließend alle gemeinsamen Teiler, so erhält man als Endergebnis einen nicht weiter zu vereinfachenden Bruch.

Das Produkt aller gemeinsamen Teiler wird oftmals als "größter gemeinsamer Teiler" (ggT) bezeichnet. Die explizite Berechnung des ggT ist meist nicht erforderlich; die Aussage, dass sich durch Kürzen des größten gemeinsamen Teilers von Zähler und Nenner ein nicht weiter zu vereinfachender Bruch ergibt, gilt jedoch allgemein.

Bruchterme lassen sich durcheinander dividieren, indem man – durch Vertauschen von Zähler und Nenner – den Kehrbruch des Divisors bildet und eine Multiplikation nach obigem Schema durchführt:

$$\frac{z_1}{n_1} : \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{n_2}{z_2} = \frac{z_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot z_2} \tag{12}$$

[2]

Insbesondere kann ein Bruch $\frac{z}{n}$ mit einer ganzen Zahl a multipliziert werden, indem der Zähler z mit dieser Zahl multiplizert wird:

$$a \cdot \frac{z}{n} = \frac{a}{1} \cdot \frac{z}{n} = \frac{a \cdot z}{1 \cdot n} = \frac{a \cdot z}{n}$$

Hierbei wird berücksichtigt, dass ein Zahlenwert unverändert bleibt, wenn man ihn durch 1 dividiert. Wendet man dann die Rechenregel für die Multiplikation zweier Brüche an, so bleibt der Nenner gleich, da auch eine Multiplikation mit 1 den Wert einer Zahl nicht ändert.

Auch hierbei ist eine Faktorisierung von Zähler und Nenner hilfreich, um das Endergebnis in einer möglichst vereinfachten Form zu erhalten. Das gleiche Verfahren kann genutzt werden, um so genannte Doppelbrüche aufzulösen:

$$\frac{\frac{z_1}{n_1}}{\frac{z_2}{n_2}} = \frac{z_1}{n_1} : \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{n_2}{z_2}$$

Bereits in der Antike fand Euklid einen Algorithmus zur Berechnung des ggT; dieser ist auf der Grund-Wissen-Seite im Rahmen des Python-Tutorials näher beschrieben.

Prozentrechnung

Bruchzahlen können auch verwendet werden, um Größenvergleiche anzugeben. Eine Bruchzahl beschreibt dabei das Verhältnis zweier Größen, d.h. welchen Bruchteil die eine Zahl (der Nenner) von der anderen Zahl (dem Zähler) ausmacht.

Um Zahlenverhältnisse vergleichen zu können, ist es oftmals hilfreich die Bruchteile auf den selben Nenner zu bringen. Haben zwei Zahlen unterschiedliche Zähler a und b, aber einen gleichen Nenner n, so gilt stets:

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{n} < \frac{b}{n}$$

Als gemeinsamer Nenner wird in der Praxis meist die Zahl 100 verwendet und statt von Hundertsteln von Prozenten gesprochen. Für 1 Prozent schreibt man wahlweise $\frac{1}{100}$ oder $0{,}01$ oder 1%.

Die Anzahl der Prozente wird üblicherweise als Prozentsatz p bezeichnet. Hierbei ist allerdings stets darauf zu achten, auf welchen Grundwert G sich die Prozentangabe bezieht.

Beispiel:

- Werden zu einem Grundwert von $G = 1$ Liter Wasser ein Bruchteil von $p = 10\%$ hinzu gegeben, so ergibt sich eine neue Menge $G + 0{,}1 \cdot G = 1{,}1$ Liter.

  Werden von dieser Menge ($G = 1{,}1$ Liter) hingegen $p = 10\%$ abgezogen, so bleiben nicht ein Liter, sondern "nur" $G - 0{,}1 \cdot G = 0{,}99$ Liter übrig.

Der tatsächliche Wert, den eine Prozentangabe wiedergibt, wird Prozentwert W genannt. Er lässt sich als Produkt aus dem Prozentsatz p und dem basierenden Grundwert G berechnen:

$$W = p\% \cdot G \tag{13}$$

Im obigen Beispiel wurde die Prozentformel (13) bereits unmittelbar angewendet:

- Bezogen auf den Grundwert 1 entspricht ein Prozentsatz von 10% einem Prozentwert von $\frac{10}{100} \cdot 1 = 0{,}1$.
- Bezogen auf den Grundwert 1,1 entspricht der gleiche Prozentsatz einem Prozentwert von $\frac{10}{100} \cdot 1{,}1 = 0{,}11$.

Wird der sich resultierende Prozentwert zum jeweiligen Grundwert addiert beziehungsweise von diesem abgezogen, so ergeben sich folglich auch unterschiedliche Ergebnisse.

Kleinere Mengenangaben werden häufig in Tausendstel (Promille) oder Millionstel (Pars per Million) angegeben. Für 1 Promille schreibt man 1 ‰ und für ein Millionstel 1 ppm.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Das Potenzieren entspricht, wie bereits im Abschnitt *Rechnen mit reellen Zahlen* erwähnt, einem mehrfachen Multiplizieren; das Wurzelziehen hingegen der Umkehrung des Potenzierens. Auf einige der dafür relevanten Rechenregeln wird im folgenden Abschnitt näher eingegangen, ebenso auf das Logarithmieren als zweite Möglichkeit, einen Potenz-Term nach der gesuchten Variablen aufzulösen.

Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

Der Wert einer Potenz entspricht stets einer reellen Zahl. Zwei Potenzen mit gleicher Basis $a \neq 0$ und gleichem Exponent n lassen sich somit nach den für reelle Zahlen üblichen Rechenregeln addieren und subtrahieren.
Stehen c_1 und c_2 für beliebige konstante Zahlen und n für eine natürliche Zahl[1], so gilt:

$$c_1 \cdot a^n + c_2 \cdot a^n = (c_1 + c_2) \cdot a^n \tag{14}$$

Unterscheiden sich zwei Potenzen in ihrer Basis und/oder in ihrem Exponenten, so kann eine Addition oder Subtraktion beider Potenzen nicht weiter vereinfacht werden. Multiplikationen und Divisionen von Potenzen mit ungleicher Basis und/oder ungleichem Exponenten lassen sich hingegen mit Hilfe der folgenden Rechenregeln umformen.

Rechenregeln für Potenzen mit gleicher Basis

Potenzen können miteinander multipliziert werden, wenn sie eine gemeinsame Basis besitzen. In diesem Fall werden die Exponenten addiert:

$$a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1 + n_2} \tag{15}$$

Nach dem gleichen Prinzip können Potenzen mit gleicher Basis dividiert werden, indem man die Differenz ihrer Exponenten bildet:

$$\frac{a^{n_1}}{a^{n_2}} = a^{n_1 - n_2} \tag{16}$$

[1] Auch allgemeine Potenzen (mit beliebigem Exponenten $n \in \mathbb{R}$) lassen sich auf diese Art addieren bzw. subtrahieren. Die Einschränkung $a \neq 0$ ist dabei notwendig, da die Potenz 0^0 nicht definiert ist.

Diese Gleichung erlaubt es, eine Potenz mit negativem Exponenten als Kehrwert einer Potenz mit positivem Exponenten aufzufassen. Ist nämlich $n_1 = 0$, so gilt $a^{n_1} = a^0 = 1$. Damit folgt allgemein:[2]

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{17}$$

Darüber hinaus gilt für mehrfache Produkte von Potenzen, also für "Potenzen von Potenzen", folgende Formel[3]:

$$(a^{n_1})^{n_2} = a^{n_1 \cdot a^{n_2}} \tag{18}$$

Beispiele:

- Multipliziert man $100 = 10^2$ mit $1\,000 = 10^3$, so lautet das Ergebnis:

  $$100 \cdot 1\,000 = 10^2 \cdot 10^3 = 10^5 = 100\,000$$

  Bei der Multiplikation von Zehnerpotenzen muss somit nur die Anzahl an Nullen addiert werden.

- Teilt man $10 = 10^1$ durch $1\,000 = 10^3$, so lautet das Ergebnis:

  $$\frac{10}{1\,000} = \frac{10^1}{10^3} = 10^{1-3} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

  Bei der Division von Zehnerpotenzen wird die Anzahl an Nullen des Nenners von der Anzahl an Nullen des Zählers subtrahiert. Ergibt sich dabei eine negative Anzahl an Nullen, so gibt diese Zahl die Nachkommastelle des Ergebnisses an:

  $$10^{-2} = 0{,}01$$

[2] Auf diese Weise lässt sich eine plausible Erklärung angeben, warum $a^0 = 1$ für alle $a \neq 0$ ist. Es gilt beispielsweise für $a = 10$

$$\begin{aligned}
10^{-3} &= \frac{1}{1\,000} = 0{,}001 \\
10^{-2} &= \frac{1}{100} = 0{,}01 \\
10^{-1} &= \frac{1}{10} = 0{,}1 \\
10^{\pm 0} &= \frac{1}{1} = 1 \\
10^{+1} &= \frac{10}{1} = 10 \\
10^{+2} &= \frac{100}{1} = 100 \\
10^{+3} &= \frac{1\,000}{1} = 1\,000
\end{aligned}$$

[3] Die Gleichung für Potenzen von Potenzen folgt aus der Gleichung für Potenz-Multiplikationen. Setzt man in Gleichung (15) für n_1 und n_2 gleiche Werte ein, d.h. $n_1 = n_2 = n$, so gilt:

$$\underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m \text{ mal}} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{}}\!\!{}_{m \text{ mal}} = a^{n \cdot m}$$

- Multipliziert man $32 = 2^5$ mit sich selbst, so lautet das Ergebnis:

$$32 \cdot 32 = 2^5 \cdot 2^5 = 2^{10} = 1\,024$$

Wird eine Potenz quadriert, so wird ihr Exponent verdoppelt.

Rechenregeln für Potenzen mit gleichen Exponenten

Neben den Rechenregeln für Potenzen mit gleicher Basis können auch Potenzen mit gleichen Exponenten durch Multiplikation bzw. Division zusammengefasst werden.[4] Es gilt:

$$a_1{}^n \cdot a_2{}^n = (a_1 \cdot a_2)^n \tag{19}$$

und

$$\left(\frac{a_1{}^n}{a_2{}^n} \right) = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^n \tag{20}$$

Produkte lassen sich somit potenzieren, indem jeder ihrer Faktoren mit dem gleichen Exponenten potenziert wird. Entsprechend lassen sich auch Brüche potenzieren, indem sowohl Zähler wie auch Nenner den gleichen Exponenten erhalten.

Eine wichtige Rolle hierbei spielt die Potenz $(-1)^n$. Je nachdem, ob n geradzahlig (durch 2 teilbar) ist oder nicht, hebt sich das Vorzeichen auf bzw. bleibt bestehen:

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Diese Besonderheit ist mit der Multiplikationsregel "Minus mal Minus gibt Plus" identisch. Kombiniert man Gleichung (19) mit der obigen Gleichung, indem man $a_1 = (-1)$ setzt und beide Seiten der Gleichung vertauscht, so gilt für beliebige Potenzen stets:

$$\begin{aligned} (-a)^{2 \cdot n} &= (-1)^{2 \cdot n} &\cdot a^{2 \cdot n} &= +a^{2 \cdot n} \\ (-a)^{2 \cdot n+1} &= (-1)^{2 \cdot n+1} &\cdot a^{2 \cdot n+1} &= -a^{2 \cdot n+1} \end{aligned}$$

Eine negative Basis verliert durch ein Potenzieren mit einem geradzahligen Exponenten $2 \cdot n$ somit stets ihr Vorzeichen. Durch Potenzieren mit einem ungeradzahligen Exponenten $2 \cdot n + 1$ bleibt das Vorzeichen der Basis hingegen erhalten.

Rechenregeln für Wurzeln und allgemeine Potenzen

Neben der ersten Erweiterung des Potenzbegriffs auf negative Exponenten als logische Konsequenz aus Gleichung (16), die sich auf die Division zweier Potenzen bezieht, ist auch anhand Gleichung (18), die Potenzen von Potenzen beschreibt, eine zweite Erweiterung des Potenzbegriffs möglich. Im Allgemeinen lautet diese Gleichung:

$$(a^{n_1})^{n_2} = a^{n_1 \cdot a^{n_2}}$$

[4] Additionen und Subtraktionen von Potenzen mit ungleicher Basis lassen sich nicht weiter zusammenfassen.

Das Wurzelziehen stellt die Umkehrung des Potenzierens dar. Um die obige Rechenregel umzukehren, muss die Multiplikation des Exponenten umgekehrt werden. Setzt man $n_1 = n$ und $n_2 = \frac{1}{n}$, so folgt:

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Das Ergebnis stimmt damit überein, dass die n-fache Wurzel einer n-fachen Potenz wieder die ursprüngliche Zahl ergibt:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Tatsächlich können folgende Umformungen als allgemeine Rechenregeln genutzt werden:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \tag{21}$$

sowie

$$\sqrt[n_2]{a^{n_1}} = a^{\frac{n_1}{n_2}} \tag{22}$$

Da Wurzeln somit nichts anderes als Potenzen mit gebrochenem Exponenten $n \in \mathbb{Q}$ darstellen, gelten die in den beiden vorherigen Abschnitten aufgeführten Rechenregeln (14) bis (20) gleichermaßen auch für Wurzeln.

Auf *Wurzelgleichungen* wird im Rahmen der elementaren Algebra, auf *Wurzelfunktionen* im Analysis-Kapitel näher eingegangen.

Rechenregeln für Logarithmen

Das Logarithmieren stellt neben dem Wurzelziehen eine zweite Möglichkeit dar, eine Potenz a^n zu finden, die ein bestimmtes Ergebnis b liefert. Während beim Wurzelziehen der (Wurzel-)Exponent n vorgegeben ist und die zum Wert der Potenz passende Basis a gesucht wird, hilft das Logarithmieren dabei, den zu einer vorgegebenen Basis a passenden Exponenten n zu finden. Die Fragestellung lautet somit:

$$a^n = b \quad \Rightarrow \quad n = ?$$

Um dieses mathematische Problem zu lösen, muss der so genannte Logarithmus von b zur Basis a ermittelt werden.

Definition:

> Der Logarithmus $n = \log_a b$ ist diejenige Zahl, mit welcher die Basis a potenziert werden muss, um das Ergebnis b zu erhalten. Es gilt:
>
> $$a^n = b \quad \Leftrightarrow \quad n = \log_a b$$

Beispielsweise gilt somit $\log_a a = 1$, wie sich durch Einsetzen in den linken Teil der obigen Äquivalenz-Gleichung überprüfen lässt, sowie $\log_a a^n = n$, da n genau der Zahl entspricht, mit der die Basis a potenziert werden muss, um das Ergebnis a^n zu erhalten.

Eine einfache Berechnung eines Logarithmus "von Hand" ist allgemein nur in seltenen Fällen möglich. Früher wurden daher Werte-Tabellen für Logarithmen in Lehrbüchern und Formelsammlungen abgedruckt, inzwischen haben Taschenrechner bzw. Computerprogramme mit entsprechenden Funktionen die Berechnung von Logarithmen wesentlich vereinfacht und Werte-Tabellen letztlich überflüssig gemacht. In der Praxis sind insbesondere Logarithmen zur Basis 10 ("dekadische" Logarithmen, Symbol: lg), zur Basis e ("natürliche" Logarithmen, Symbol: ln) und zur Basis 2 ("binäre" oder duale" Logarithmen, Zeichen lb oder ld) von Bedeutung.[5] Um einen Logarithmus auf eine andere Basis umzurechnen, kann folgende Formel angewendet werden:

$$\log_{a_2} b = \frac{\log_{a_1} b}{\log_{a_1} a_2} \tag{23}$$

Die obige Formel ermöglicht es beispielsweise, einen dekadischen Logarithmus ($a_1 = 10$) in einen binären Logarithmus ($a_2 = 2$) umzurechnen, indem man diesen durch $\log_{10} 2 \approx 0,301$ teilt.

Summen und Differenzen von Logarithmen

Logarithmen mit gleicher Basis lassen sich addieren oder subtrahieren. Das Ergebnis einer Logarithmus-Addition ist ein Logarithmus mit gleicher Basis, dessen Argument gleich dem Produkt der Argumente beider zu addierenden Logarithmen ist:

$$\log_a b_1 + \log_a b_2 = \log_a (b_1 \cdot b_2) \tag{24}$$

Entsprechend ist das Ergebnis einer Logarithmus-Subtraktion ein Logarithmus mit gleicher Basis, dessen Argument gleich dem Quotienten der Argumente beider zu subtrahierender Logarithmen ist:

$$\log_a b_1 - \log_a b_2 = \log_a \left(\frac{b_1}{b_2} \right) \tag{25}$$

Wird ein Logarithmus mit einem konstanten Faktor c multipliziert, so entspricht dies einer c-Fachen Addition des Logarithmus mit sich selbst. In diesem Fall entspricht das Ergebnis somit einem Logarithmus mit gleicher Basis a, dessen Argument c-fach mit sich selbst multipliziert werden muss:

$$c \cdot \log_a b = \log_a (b^c) \tag{26}$$

Auf *Logarithmusgleichungen* wird im Rahmen der elementaren Algebra, auf *Logarithmusfunktionen* im Analysis-Kapitel näher eingegangen.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

---

[5] Für dekadische Logarithmen (lg) und natürliche Logarithmen (ln) besitzen Taschenrechner häufig entsprechende Funktionstasten.

Folgen und Reihen

Folgen und ihre Eigenschaften

Ordnet man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_{\rm n}$ eindeutig zu, so entsteht eine unendliche (reelle) Folge $(a_{\rm n})$. Die einzelnen Werte der Folge heißen Folgenglieder und werden mit Indizes durchnummeriert:

$$(a_{\rm n}) = a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_{\rm n},\, \ldots$$

Im Unterschied zu einer Menge kann bei einer Folge ein und das selbe Glied mehrere Male auftreten. Die Definition einer Folge kann auf zweierlei Arten erfolgen:

- Viele Folgen lassen sich nach einem Bildungsgesetz mittels eines Terms aufstellen. Das Bildungsgesetz wird hierzu in runde Klammern geschrieben. Beispiel:

  $$(a_{\rm n}) = (2 \cdot n^2) = 2,\, 8,\, 18,\, 32,\, \ldots$$

- Ist (mindestens) das erste Folgenglied bekannt und besteht eine Rechenvorschrift, wie sich ein Folgenglied aus einem vorhergehenden berechnen lässt, so sind alle Glieder einer Folge ebenfalls eindeutig festgelegt. Dieses Vorgehen wird als "Rekursion" bezeichnet. Beispiel:

  $$a_{\rm n} = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 5,\, 8,\, 13,\, 21,\, \ldots$$

  Die obige Zahlenfolge wird auch zu Ehren von Leonardo Fibonacci als "Fibonacci-Folge" bezeichnet. Die Folgenglieder lassen sich dadurch berechnen, indem jeweils die Summe der beiden vorangehenden Folgenglieder gebildet wird. Das Bildungsgesetz der Folge lautet somit für $n \ge 2$:

  $$a_{\rm n} = a_{\rm n-2} + a_{\rm n-1}$$

Beschränkt man die Definitionsmenge auf die ersten n natürlichen Zahlen ($n \ne 0$), so erhält man eine endliche Folge mit dem Anfangsglied a_1 und dem Endglied $a_{\rm n}$.

Monotonie einer Zahlenfolge

Ein wichtiges Kriterium bei der Unterscheidung von Zahlenfolgen ist ihre so genannte Monotonie. Werden die Werte der Folgenglieder mit zunehmendem Index kontinuierlich (wenn möglicherweise auch in unterschiedlichem Maß) größer, so nennt man die Folge monoton wachsend zunehmend. Nehmen die Werte der Folgenglieder im umgekehrten Fall kontinuierlich (möglicherweise unterschiedlich stark) ab, so spricht man von einer monoton fallenden Folge. Bei einer konstanten Folge bleiben die Werte im Verlauf der Folge konstant.

Es gilt somit für jede Folge (a_{n}):

$$\begin{aligned} a_{\text{n}+1} &\ge a_{\text{n}} \quad \text{für alle } n \quad &\Rightarrow \quad &(a_{\text{n}}) \text{ ist monoton zunehmend.} \\ a_{\text{n}+1} &\le a_{\text{n}} \quad \text{für alle } n \quad &\Rightarrow \quad &(a_{\text{n}}) \text{ ist monoton abnehmend.} \\ a_{\text{n}+1} &= a_{\text{n}} \quad \text{für alle } n \quad &\Rightarrow \quad &(a_{\text{n}}) \text{ ist konstant.} \end{aligned}$$

Gilt bei der obigen Unterscheidung anstelle der Kleiner-Gleich-Relation $\le$ die Kleiner-Relation $<$ beziehungsweise anstelle der Größer-Gleich-Relation $\ge$ die Größer-Relation $>$, so nennt man die Folge *streng* monoton ab- beziehungsweise zunehmend.

Beschränktheit einer Zahlenfolge

Eine Folge (a_{n}) wird beschränkt genannt, wenn es zwei reelle Zahlen s und S gibt, so dass die Werte aller Folgenglieder zwischen beiden begrenzenden Zahlen liegen, wenn also gilt:

$$s \le a_{\text{n}} \le S \quad \text{für alle } n$$

Hierbei wird s als untere Schranke und S als obere Schranke bezeichnet.

Grenzwert einer Zahlenfolge

Eine Folge (a_{n}) hat einen Grenzwert a, wenn sich außerhalb einer beliebig großen Umgebung von a nur endlich viele Glieder der Folge befinden. Man sagt in diesem Fall, dass der Grenzwert ("Limes") der Folge für gegen Unendlich gehende Werte von n gleich a ist; in mathematischer Kurzform schreibt man:

$$\lim_{n\to\infty} a_{\text{n}} = a$$

Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so nennt man sie konvergent, andernfalls divergent.

Bezüglich des Grenzwerts einer Folge gilt:

- Der Grenzwert einer Folge ist stets eindeutig bestimmt; insbesondere ist ∞ kein zulässiger Grenzwert.
- Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent, besitzt also einen (eindeutigen) Grenzwert.
- Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beispiele:

- Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist konvergent zum Grenzwert 0, also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

- Die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ ist konvergent zum Grenzwert 1, also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

- Die Folge (n^2) ist divergent, sie hat keinen Grenzwert.

Folgen, die den Wert Null als Grenzwert haben, nennt man Nullfolgen. Ihnen kommt eine besondere Bedeutung zu, denn allgemein gilt die Aussage, dass eine Folge (a_{n}) den Grenzwert a hat, wenn die Folge $(a_{\mathrm{n}} - a)$ eine Nullfolge ist.

Dieses Konvergenzkriterium wurde von Augustin-Louis Cauchy in eine noch nützlichere Form gefasst, mittels derer sich die Konvergenz einer Folge auch dann nachweisen lässt, wenn der Grenzwert a nicht schon von vornherein bekannt ist. Das so genannte "Cauchy-Kriterium" besagt, dass jede Folge genau dann konvergiert, wenn sich zu jedem beliebig kleinen Wert ε eine Zahl $n_0 > n$ finden lässt, so dass für alle Folgenglieder $a_{\mathrm{i}}, a_{\mathrm{j}}$ ab $a_{\mathrm{n_0}}$ gilt, dass $|a_{\mathrm{i}} - a_{\mathrm{j}}| < \varepsilon$ ist.

Wichtige Grenzwerte

Für die Mathematik haben unter anderem folgende Grenzwerte für n gegen Unendlich $(n \in \mathbb{N})$ eine besondere Bedeutung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} &= 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{R} \\
\lim_{n\to\infty} a^n &= 0 \quad \text{für } |a| < 1 \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \quad \text{für } a \in \mathbb{R}^+ \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e \\
\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \frac{1}{e} \\
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n &= e^k
\end{aligned}$$

Die Zahl $e \approx 2,71828...$ ist irrational und wird "Eulersche Zahl" genannt; sie ist insbesondere für *Exponentialfunktionen* von besonderer Bedeutung.

Arithmetische Folgen

Eine Folge heißt arithmetisch, wenn die Differenz d zweier aufeinander folgender Glieder stets konstant ist. Für eine arithmetische Folge gilt also:

$$a_{\mathrm{n+1}} - a_{\mathrm{n}} = d$$

Als Bildungsgesetz gilt:

$$a_{\mathrm{n}} = a_1 + (n-1) \cdot d \tag{27}$$

Ist $d > 0$, so ist die Folge (streng) monoton steigend, bei $d < 0$ ist die Folge (streng) monoton fallend. Gilt $d = 0$, so ist die Folge konstant.

Da die einzelnen Folgenglieder immer um den gleichen Betrag zu- beziehungsweise abnehmen, ist das mittlere dreier Folgenglieder stets gleich dem arithmetischen Mittel der beiden benachbarten Folgenglieder. Es gilt also:[1]

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{a_{\mathrm{n+1}} + a_{\mathrm{n-1}}}{2} \tag{28}$$

Wichtige arithmetische Folgen sind beispielsweise die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$, die geraden Zahlen $2, 4, 6, 8, \ldots$, die ungeraden Zahlen $1, 3, 5, 7, \ldots$, usw.

Will man zwischen zwei Werten a_1 und a_2 insgesamt n weitere Zahlen als eine arithmetische Folge einfügen, so gilt dabei für alle Differenzen der einzelnen Folgenglieder:

$$d_{\mathrm{i}} = \frac{a_2 - a_1}{n + 1}$$

Diese Formel kann beispielsweise hilfreich sein, um fehlende Werte in Wertetabellen (näherungsweise) zu ergänzen. Eine ähnliche Anwendung kann darin bestehen, n Objekte (beispielsweise Holzbalken) in jeweils gleichem Abstand voneinander zwischen zwei festen Grenzen a_1 und a_2 einzufügen; dabei gibt d_{i} an, in welchem Abstand die Mittelpunkte der Objekte jeweils eingefügt werden müssen.

Geometrische Folgen

Eine Folge heißt geometrisch, wenn der Quotient q zweier aufeinander folgender Glieder stets konstant ist. Für eine jede geometrische Folge gilt also:

$$\frac{a_{\mathrm{n+1}}}{a_{\mathrm{n}}} = q$$

Als Bildungsgesetz gilt:

$$a_{\mathrm{n}} = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{29}$$

Ist $q > 1$, so ist die Folge (streng) monoton zunehmend, bei $0 < q < 1$ ist die Folge (streng) monoton abnehmend und konvergiert gegen Null. Gilt $q = 0$, so ist die Folge konstant, im Fall $-\infty < q < 0$ ist die Folge "alternierend", die Werte der Folgenglieder sind also abwechselnd positiv und negativ.

[1] Bei einer arithmetischen Folge gilt:

$$a_{\mathrm{n+1}} - a_{\mathrm{n}} = d = a_{\mathrm{n}} - a_{\mathrm{n-1}}$$

Setzt man in der obigen Gleichung die linke und die rechte Seite gleich und löst diese Gleichung nach a_{n} auf, so erhält man die Rechenregel zur Berechnung des arithmetischen Mittels. Diese Formel kann auch in der Statistik verwendet werden, um das *Arithmetische Mittel* einer Messreihe zu bestimmen.

Da die einzelnen Folgenglieder immer um den gleichen Faktor zu- beziehungsweise abnehmen, ist das mittlere dreier Folgenglieder stets gleich dem geometrischen Mittel der beiden benachbarten Folgenglieder. Es gilt also:[2]

$$|a_{\mathrm{n}}| = \sqrt{a_{\mathrm{n}+1} \cdot a_{\mathrm{n}-1}} \tag{30}$$

Will man zwischen zwei Werten a_1 und a_2 insgesamt n weitere Zahlen als eine geometrische Folge einfügen, so gilt dabei für alle Quotienten der einzelnen Folgenglieder:

$$q_{\mathrm{i}} = \sqrt[n+1]{\frac{a_2}{a_1}}$$

Reihen und ihre Eigenschaften

Die Summe der Glieder einer Folge (oder eines Teils der Folgenglieder) wird als Reihe bezeichnet. Mathematisch wird die Summe s_{n} der Glieder einer Folge (a_{n}) durch das Summen-Symbol Σ ausgedrückt:

$$s_{\mathrm{n}} = \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{\mathrm{n}} \tag{31}$$

Hierbei wird unterhalb des Summenzeichens die Untergrenze und oberhalb die Obergrenze des Index i angegeben, wobei die Summengrenzen jeweils ganze Zahlen sind. Im obigen Fall werden alle Folgenglieder a_{i} somit von $i = 1$ bis $i = n$ aufsummiert.

Ist die untere Summationsgrenze $i = k$ gleich der oberen, so bedeutet dies, dass die Summe aus einer einzigen Zahl a_{k} besteht:

$$\sum_{i=k}^{k} a_{\mathrm{i}} = a_{\mathrm{k}}$$

Ist die untere Summationsgrenze größer als die obere Summationsgrenze, wird das Ergebnis der Summe als Null definiert. Weitere wichtige Rechenregeln für das Summenzeichen sind:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n}(a_{\mathrm{i}} + b_{\mathrm{i}}) = \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} + \sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{i}} \\
\sum_{i=1}^{n}(a_{\mathrm{i}} - b_{\mathrm{i}}) = \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} - \sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{i}} \\
\sum_{i=i}^{n} c \cdot a_{\mathrm{i}} = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}}
\end{gathered} \tag{32}$$

[2] Bei einer geometrischen Folge gilt:

$$\frac{a_{\mathrm{n}+1}}{a_{\mathrm{n}}} = q = \frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}-1}}$$

Setzt man in der obigen Gleichung die linke und die rechte Seite gleich und löst diese Gleichung nach a_{n} auf, so erhält man die Rechenregel zur Berechnung des geometrischen Mittels. Diese Formel kann auch in der Statistik verwendet werden, um das *Geometrische Mittel* einer Messreihe zu bestimmen.

Die oberen beiden dieser Rechenregeln entsprechen einem Umsortieren der Summanden, das letzte einem Ausklammern des Faktors c aus jedem Summanden. Diese Regel findet auch Anwendung, wenn man n Folgenglieder mit konstantem Wert aufsummiert:

$$\sum_{i=1}^{n} c = c \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 = c \cdot \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n\text{-mal}} = n \cdot c \tag{33}$$

Nach der obigen Gleichung funktionieren auch digitale Zählmaschinen, die eine Reihe von (meist elektrischen) "Eins"-Signalen aufaddieren und den entsprechenden Wert n anzeigen.

Zwei weitere Rechentricks werden im Umgang mit Reihen oftmals nutzvoll eingesetzt:

- Eine Reihe lässt sich in zwei (oder mehrere) Teilsummen zerlegen. Werden in der ursprünglichen Reihe Folgenglieder von 1 bis n aufsummiert, so können in äquivalenter Weise zunächst nur die Folgenglieder bis zu einem zwischen beiden Grenzen liegenden Wert k summiert werden, und anschließend die restlichen Folgenglieder von $k+1$ bis n addiert werden.[3] Es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{k} a_{\mathrm{i}} + \sum_{i=k+1}^{n} a_{\mathrm{i}} \tag{34}$$

- Der Wert einer Reihe bleibt durch eine Indexverschiebung unverändert. Hierunter versteht man ein Verfahren folgender Art:

$$\sum_{i=1}^{2} a_{\mathrm{i}} = a_1 + a_2 = a_{3-2} + a_{4-2} = \sum_{i=3}^{4} a_{\mathrm{i}-2}$$

  Wird der Index der Summationsgrenzen im allgemeinen Fall um $+k$ angehoben, so muss der Index der Folgenglieder auf $i - k$ reduziert werden.[4] Es gilt somit:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1+k}^{n+k} a_{\mathrm{i-k}} \tag{35}$$

  Eine Verminderung der Summationsgrenze um $-k$ bewirkt in entsprechender Weise eine Anhebung des Index der Folgenglieder auf $i + k$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1-k}^{n-k} a_{\mathrm{i+k}} \tag{36}$$

---

[3] Im umgekehrten Fall lässt sich eine Zerlegung in Teilsummen auch nutzen, um den Wert einer Reihe zu berechnen, deren Glieder von $k > 1$ bis n aufsummiert werden. Hierbei gilt stets:

$$\sum_{i=k}^{n} a_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{\mathrm{i}}$$

[4] Diese Ersetzung ist vorzunehmen, bevor irgendeine weitere Auswertung erfolgt. Darauf ist insbesondere dann zu achten, wenn sich vor dem Index i einer Reihe ein Minuszeichen befindet. Durch eine Verschiebung der Summationsgrenzen um $+k$ wird beispielsweise $1 - i$ zu $1 - (i + k) = 1 - i - k$.

Arithmetische Reihen

Addiert man alle Glieder einer *arithmetischen Folge*, also eine Folge von Zahlen, die sich untereinander stets um den gleichen Wert d unterscheiden, so ergibt sich eine arithmetische Reihe. Für den Wert der wohl bekanntesten arithmetischen Reihe, bei der alle natürlichen Zahlen von 1 bis n addiert werden, hat Carl Friedrich Gauss bereits in jungem Alter die folgende Formel gefunden, die bisweilen auch "Kleiner Gauss" genannt wird:[5][6]

$$s_{\mathrm{n}} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \tag{37}$$

[5] Die Gültigkeit von Gleichung (37) wurde bereits als Beispiel im Abschnitt *Die vollständige Induktion* gezeigt.

[6] Ähnliche Sonderfälle arithmetischer Reihen sind die Reihen der geraden und ungeraden Zahlen:

- Die Folge der geraden Zahlen 2, 4, 6, 8, ... lässt sich als $(a_{\mathrm{n}}) = 2 \cdot n$ ausdrücken. Für die entsprechende Reihe s_{n} gilt:

$$s_{\mathrm{n}} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot i = n \cdot (n+1)$$

- Die Folge der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, ... lässt sich als $(a_{\mathrm{n}}) = 2 \cdot n - 1$ ausdrücken. Für die entsprechende Reihe s_{n} gilt:

$$s_{\mathrm{n}} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot i - 1 = n^2$$

Nach der obigen Gleichung lässt sich somit jede Quadratzahl als arithmetische Reihe darstellen:

$$\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
2^2 &= 1 + 3 \\
3^2 &= 1 + 3 + 5 \\
4^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 \\
&\ldots \\
n^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2 \cdot n - 1)
\end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall lässt sich der Wert einer arithmetischen Reihe folgendermaßen berechnen:[7]

$$s_{\mathrm{n}} = \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{n} \big(a_1 + (i-1) \cdot d\big) = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d \tag{38}$$

Geometrische Reihen

Addiert man alle Glieder einer *geometrischen Folge*, also eine Folge von Zahlen, die sich untereinander stets um den gleichen Faktor q unterscheiden, so ergibt sich eine geometri-

[7] Hierfür muss die Reihe zunächst aufgeteilt werden:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_1 + (i-1) \cdot d\big) = \sum_{i=1}^{n} a_1 + \sum_{i=1}^{n} (i-1) \cdot d$$

In der ersten Teilreihe wird der konstante Wert a_1 aufsummiert; ihr Wert ist nach Gleichung (33) gleich $n \cdot a_1$. Bei der zweiten Teilreihe kann der konstante Faktor d nach Gleichung (32) ausgeklammert werden. Somit gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_1 + (i-1) \cdot d\big) = n \cdot a_1 + d \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-1)$$

Die zweite Teilreihe kann mittels einer Indexverschiebung gemäß Gleichung (36) umgeschrieben werden. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} i$$

Nach Gleichung (37) gilt für den Wert dieser Reihe

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1) \cdot (n-1+1)}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Addiert man beide Teilreihen und berücksichtigt dabei den Faktor d (zweite Gleichung dieser Anmerkung), so erhält man Gleichung (38).

sche Reihe. Der Wert s_{n} einer endlichen geometrischen Reihe lässt sich folgendermaßen berechnen:[8]

$$s_{\mathrm{n}} = \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot q^{i-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{39}$$

Ob eine unendliche geometrische Reihe konvergiert, hängt vom Wert von q ab. Ist $|q| > 1$, so divergiert die Reihe; ist hingegen $|q| < 1$, so konvergiert die Reihe, und es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Mittels geometrischen Reihen können beispielsweise *Zinseszinsen* berechnet werden.

Produktfolgen

Neben gewöhnlichen Reihen als Summenfolgen können auch Produktfolgen gebildet werden. In der Praxis sind jedoch meist nur so genannte Partialproduktfolgen von Bedeutung, deren Ergebnis das Produkt von n Folgengliedern ist. Mathematisch wird ein solches Produkt p_{n} der Glieder einer Folge (a_{n}) durch das Produkt-Symbol Π ausgedrückt:

$$p(n) = \prod_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots a_{\mathrm{n}}$$

Hierbei wird unterhalb des Produktzeichens die Untergrenze und oberhalb die Obergrenze des Index i angegeben, wobei die Produktgrenzen jeweils ganze Zahlen sind.

[8] Die Formel (39) zur Berechnung einer geometrischen Reihe kann auf zweierlei Arten dargestellt werden, denn es gilt:

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{-(q^n - 1)}{-(q - 1)} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Die erste Darstellung wird im Fall $q > 1$, die zweite im Fall $q < 1$ genutzt.

Um die Gültigkeit von Formel (39) zu demonstrieren, wird die Differenz von s_{n} und $q \cdot s_{\mathrm{n}}$ betrachtet. Es gilt:

$$\begin{aligned}
s_{\mathrm{n}} &= a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}) \\
q \cdot s_{\mathrm{n}} &= a_1 \cdot (q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n) \\
\Rightarrow s_{\mathrm{n}} - q \cdot s_{\mathrm{n}} &= a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} \\
&\qquad - q - q^2 - q^3 - \ldots - q^{n-1} - q^n)
\end{aligned}$$

Auf der linken Seite kann s_{n} ausgeklammert werden, auf der rechten Seite heben sich alle Summanden bis auf 1 und $-q^n$ auf. Folglich gilt:

$$s_{\mathrm{n}} \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$$

Löst man diese Gleichung nach s_{n} auf, so erhält man als Ergebnis $s_{\mathrm{n}} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, was nach der ersten Gleichung dieser Anmerkung mit Formel (39) übereinstimmt.

Für die insbesondere in der *Kombinatorik* häufig auftretende Partialproduktfolge der natürlichen Zahlen ist eine besondere Notation üblich:

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1! = 1 \\
p_2 &= 2! = 1 \cdot 2 \\
p_3 &= 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \\
&\vdots \\
p_{\mathrm{n}} &= n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n
\end{aligned}$$

Der Ausdruck $n!$ wird dabei als "n Fakultät" gelesen; für den Sonderfall $n = 0$ ist dabei $0! = 1$ definiert.

Zinsrechnung

Ein Anwendungsbeispiel für geometrische Reihen ist die Zinsrechnung. Unter Zinsen versteht man allgemein einen Betrag, der für das Überlassen einer Geldmenge ("Kapital") innerhalb einer bestimmten Zeit ("Zinsperiode", üblicherweise ein Kalenderjahr) zu bezahlen ist.

Die Höhe der Zinsen ist von drei Größen abhängig: Der überlassenen Geldmenge K_0, der Dauer t der Überlassung ("Laufzeit"), und dem so genannten Zinssatz p. Der Zinssatz gibt prozentual den Anteil an Geld an, der am Ende einer Zinsperiode bezahlt werden muss.

In der Bankenpraxis entspricht ein Jahr 360 Tagen beziehungsweise jeder Monat 30 Tagen. Bezeichnet man man bei kürzeren Zeiträumen als einem Jahr die Zahl der Zinstage mit n, so gilt $t = \frac{n}{360}$.

Einfache Verzinsung

Bei einer einfachen Verzinsung werden die Zinsen am Ende einer Zinsperiode ausgezahlt; sie werden in den folgenden Perioden somit nicht weiter mit verzinst. Das Kapital wächst in diesem Fall linear mit der Zeit an.

Mit einer einfachen Verzinsung wird in der Praxis vor allem dann gerechnet, wenn der Zeitraum zwischen den Zinszahlungen kürzer als eine Zinsperiode ist.

Die nach der Zeit t anfallenden Zinsen Z_{t} werden folgendermaßen berechnet:

$$Z_{\mathrm{t}} = K_0 \cdot p \cdot t \tag{40}$$

Die Zeit t wird dabei als Bruchteil oder Vielfaches der Zinsperiode angegeben. Die Zinsen Z_{t} werden am Ende einer Zinsperiode dem Kapital aufaddiert:

$$K_{\mathrm{t}} = K_0 + Z_{\mathrm{t}} = K_0 \cdot (1 + p \cdot t) \tag{41}$$

Beispiele:

- Eine Kapital $K_0 = 2000\,\text{Eur}$ wird am 1. März eines Jahres zu einem jährlichen Zinssatz von $p = 1,5\%$ auf eine Bank eingezahlt und am 1. September wieder abgehoben. Auf welchen Betrag K_{t} hat das Kapital in diesem Fall zugenommen?

  Das Kapital wird für sechs Monate, also 180 Tage beziehungsweise $t = \frac{180}{360}$ Jahr verzinst. Für den Betrag der Zinsen gilt mit $K_0 = 2000\,\text{Eur}$ und $p = 0,015$:

  $$Z_{\mathrm{t}} = K_0 \cdot p \cdot t = 2000\,\text{Eur} \cdot 0,015 \cdot \frac{180}{360} = 15\,\text{Eur}$$

  Das Kapital beträgt am Ende somit $(2000 + 15)\,\text{Eur}$.

- Eine Geldmenge von $K_0 = 10\,000\,\text{Eur}$ wird für $t = 1$ Jahr zu einem jährlichen Zinssatz von $p = 7\%$ von einer Bank geliehen. Wie viel Geld muss am Ende des Jahres zurück gezahlt werden?

  Für den Betrag an Zinsen gilt mit $K_0 = 10\,000\,\text{Eur}$, $p = 0,07$ und $t = 1$:

  $$Z_{\mathrm{t}} = K_0 \cdot p \cdot t = 10\,000\,\text{Eur} \cdot 0,07 \cdot 1 = 700\,\text{Eur}$$

  Am Endes des Jahres müssen somit $(10\,000 + 700)\,\text{Eur}$ gezahlt werden.

Barwertvergleich

Das Endkapital K_{t} nach der Zeit t wird auch als Zeitwert bezeichnet; entsprechend wird der Kapitalwert K_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ auch Barwert genannt. Kennt man das Endkapital K_{t} zu einem Zeitpunkt $t > 0$, so kann nach Umstellung der obigen Formel auch der zugrunde liegende Barwert berechnet werden:

$$K_0 = \frac{K_{\mathrm{t}}}{1 + p \cdot t} \tag{42}$$

Ein so genannter Barwertvergleich kann insbesondere genutzt werden, wenn Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten miteinander verglichen werden sollen. In diesem Fall bezieht man üblicherweise alle Zahlungen auf den Zeitpunkt $t = 0$.

Beispiel:

- Eine Rechnung kann entweder innerhalb von 7 Tagen mit 2% Preisnachlass ("Skonto") oder innerhalb von 30 Tagen ohne Preisnachlass gezahlt werden. Welchem Zinssatz entspräche hierbei eine Zahlung nach 5 Tagen?

  Bei einer sofortigen Zahlung muss bei 2% Skonto ein Kapital von $K_0 = 0,98 \cdot K_{\mathrm{t}}$ aufgebracht werden; die Zeitdifferenz zwischen einer Zahlung nach 5 und nach 30 Tagen beträgt 25 T, also ist $t = \frac{25}{360}$. Somit gilt:

  $$0,98 \cdot K_{\mathrm{t}} = \frac{K_{\mathrm{t}}}{1 + p \cdot \frac{25}{360}}$$

  Multipliziert man diese Gleichung mit dem Nenner der rechten Seite und dividiert durch K_{t}, so ergibt sich folgende Gleichung:

  $$0,98 + 0,98 \cdot p \cdot \frac{25}{360} = 1$$
  $$\Rightarrow\; p \approx 0,294$$

Der Preisnachlass entspricht, bezogen auf den angegebenen Zeitraum, somit einem Zinssatz von etwa $p = 29,4\%$.

Zinseszinsrechnung

Werden die Zinsen nach einer Zinsperiode weiter verzinst, so entstehen so genannte Zinseszinsen.

Nach einer Zinsperiode ist das ursprüngliche Kapital K_0 entsprechend der einfachen Verzinsung um die Zinsmenge Z_1 auf den Betrag K_1 angewachsen. Es gilt also:

$$K_1 = K_0 + Z_1 = K_0 + (1 + p)$$

Im zweiten Jahr wird das Kapital K_1 verzinst. Für die sich ergebenden Zinsen Z_2 beziehungsweise das Kapital K_2 nach zwei Jahren gilt:

$$K_2 = K_1 + Z_2 = K_1 \cdot (1 + p) = K_0 \cdot (1 + p)^2$$

Der Faktor $(1+p)^n$ wird Aufzinsungsfaktor oder kurz Zinsfaktor genannt und häufig auch mit q bezeichnet. Nach n Jahren Laufzeit ergibt sich damit eine Zins- beziehungsweise Kapitalmenge:

$$K_{\mathrm{n}} = K_0 \cdot (1 + p)^n = K_0 \cdot q^n \tag{43}$$

Diese nach dem Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz benannte Zinseszinsformel entspricht formal einer *geometrischen Reihe*.

Ebenso wie bei der einfachen Verzinsung kann bei einem bekannten Zinssatz p und einer gegebenen Laufzeit $n \cdot t$ auf das Anfangskapital K_0 geschlossen werden, wenn das Endkapital K_{n} bekannt ist. Als Barwert-Formel der Zinseszinsrechung ergibt sich:

$$K_0 = \frac{K_{\mathrm{n}}}{(1 + p)^n} \tag{44}$$

Die Größe $\frac{1}{(1+p)^n} = \frac{1}{q^n}$ wird auch Abzinsungsfaktor genannt, die Berechnung des Barwerts als Diskontieren bezeichnet. Diese Methode kann beispielsweise verwendet werden, um monatliche Ratenzahlungen mit einer einmaligen Zahlung zu vergleichen.

Ist in der obigen Gleichung der Zinssatz p oder die Laufzeit t gesucht, während alle anderen Größen gegeben sind, so kann die Gleichung entsprechend aufgelöst werden:

- Kennt man das Anfangskapital K_0, das Endkapital K_{n} sowie Anzahl n an Zinsperioden, so gilt für den zugehörigen Zinssatz p:

$$(1 + p)^n = \frac{K_{\mathrm{n}}}{K_0} \quad \Leftrightarrow \quad p = \sqrt[n]{\frac{K_{\mathrm{n}}}{K_0}} - 1$$

- Kennt man das Anfangskapital K_0, das Endkapital K_{n} sowie den Zinssatz p, so gilt mit den *Rechenregeln für Logarithmen* für die zugehörige Anzahl n an Zinsperioden:

$$(1 + p)^n = \frac{K_{\mathrm{n}}}{K_0} \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \ln{(1 + p)} = \ln{\left(\frac{K_{\mathrm{n}}}{K_0}\right)} \quad \Longleftrightarrow \quad n = \frac{\ln{(K_{\mathrm{n}})} - \ln{(K_0)}}{\ln{(1 - p)}}$$

So kann beispielsweise mittels der letzten Formel berechnet werden, dass sich ein Kapital K_0 mit einem beliebigen Anfangswert bei einem Zinssatz von $p = 1\%$ innerhalb von rund 70 Jahren verdoppelt. Bei einem Zinssatz von 7% verdoppelt sich das Kapital in rund 10 Jahren, bei einem Zinssatz von 10% in nur rund 7 Jahren. Dies gilt gleichermaßen für Vermögen wie für Schulden: Zinseszinsen wachsen exponentiell!

Exkurs: Teilbarkeit und Primzahlen

Lässt sich eine natürliche Zahl a ohne Rest durch eine natürliche Zahl b teilen, so nennt man a ein Vielfaches von b oder b einen Teiler von a. Bisweilen schreibt man anstelle von "b ist Teiler von a" auch in Kurzform $b \,|\, a$.

Jede Zahl a hat die Zahl 1 als Teiler, denn es gilt stets $1 \cdot a = a$. Ein Teiler, der sowohl zu einer Zahl a als auch zu einer Zahl b gehört, heißt gemeinsamer Teiler von a und b. Haben beide Zahlen keinen gemeinsamen Teiler außer der Zahl 1, so nennt man die Zahlen teilerfremd.

Die Primfaktorenzerlegung

Hat eine natürliche Zahl $p > 1$ nur zwei Teiler (1 und die Zahl p selbst), so heißt sie Primzahl. Die ersten Primzahlen ($p < 100$) sind:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

Jede Zahl, die keine Primzahl ist, wird zerlegbar genannt, denn sie lässt sich ohne Rest in mehrere andere Zahlen aufteilen. Hierzu ist folgendes Vorgehen nützlich:

1. Zunächst wird geprüft, ob die zu prüfende Zahl a durch eine beliebige, betraglich kleinere Primzahl $p < a$ teilbar ist.
2. Wird eine Primzahl p gefunden ist, die ein Teiler von a ist, so wird diese Primzahl notiert und a durch p geteilt.
3. Mit dem Ergebnis der Division wird erneut mit dem 1. Schritt begonnen. Diese Wiederholung wird so lange fortgesetzt, bis keine weitere Aufteilung in Primzahlen möglich ist.

Das obige Verfahren wird auch als "Primfaktorzerlegung" einer Zahl bezeichnet.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
17\,640 &= 2 \cdot 8820 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 4410 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2205 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 735 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 245 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 49 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \\
\Rightarrow 17\,640 &= \quad 2^3 \quad \cdot \quad 3^2 \ \cdot 5^1 \cdot \ 7^2
\end{aligned}
$$

Multipliziert man alle Primfaktoren einer Zahl miteinander, wobei einzelne Faktoren mehrfach auftreten dürfen, so erhält man als Ergebnis wiederum die ursprüngliche Zahl. Die gleiche Methode wird auch zur Ermittlung von Primzahlen mittels Computern eingesetzt.[1]

Weitere Teilbarkeitsregeln

Anhand der Ziffern einer Zahl lassen sich teilweise ebenfalls Teilbarkeitseigenschaften direkt ablesen.[2]
Eine ganze Zahl ist teilbar durch

- 2, wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist.
- 3, wenn die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist.
- 4, wenn die aus den beiden letzten Ziffern bestehende Zahl durch 4 teilbar ist.
- 5, wenn die letzte Ziffer gleich 0 oder 5 ist.
- 6, wenn die letzte Ziffer durch 2 und die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist.
- 8, wenn die aus den drei letzten Ziffern bestehende Zahl durch 8 teilbar ist.
- 9, wenn die Quersumme der Zahl durch 9 teilbar ist.
- 10, wenn ihre letzte Ziffer gleich 0 ist.

Die Quersumme bezeichnet dabei die Summe der Ziffern einer Zahl. Beispielsweise ist die Quersumme der Zahl $483 = 4 + 8 + 3 = 15$; somit ist nach der obigen Regel 483 durch 3 teilbar. Für die Zahl 7 existiert keine triviale Teilbarkeitsregel.

[1] Der als "Sieb des Eratosthenes" bekannte Algorithmus prüft dabei gemäß der obigen Methode für beliebig große natürliche Zahlen, ob diese bereits eine der bereits bekannten Primzahlen als Faktor enthalten. Ist dies der Fall, so wird die Zahl (und ihre Vielfachen) als Nicht-Primzahl markiert und die Prüfung mit der nächsten Zahl fortgesetzt. Enthält eine Zahl keine kleinere Primzahl als Faktor, so stellt sie eine Primzahl dar und wird in die Liste der bekannten Primzahlen aufgenommen.

[2] Der Beweis hierfür ist beispielsweise in *[Bittner1979]* auf Seite 33 ff. aufgeführt.

Exkurs: Zahlensysteme

Zahlen lassen sich in unterschiedlichen “Zahlensystemen” in verschiedener Form darstellen, ohne dass sich ihre mathematische Bedeutung verändert.

Historische Zahlensysteme

Die Kunst des Zählens begann wohl mit der Verwendung von Strichen zur Darstellung von Zahlen:

$$\text{I, II, III, IIII, IIIII, IIIIII, } \ldots$$

Offensichtlich ist diese Darstellungsart für größere Zahlen sehr aufwendig und unübersichtlich. Ein Ziel der verschiedenen Zahlensysteme, die sich im Lauf der Zeit entwickelten, war es somit, die jeweiligen Ziffern so miteinander zu verbinden, dass eine möglichst einfache, übersichtliche und/oder zweckmäßige Darstellung der Zahlen ergibt. Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten:

- **Additionssysteme:** Bei Additionssystemen werden die Werte der hintereinander gestellten Ziffern durch Addition (und gegebenenfalls durch Subtraktion) verknüpft. Hierbei ist die Wahl bestimmter Symbole als Grundziffern von grundlegender Bedeutung,

  Beispiele:

  - Beim “Kerbholz”-System aus mittelalterlicher Zeit wurden Symbole in ein Stück Holz eingeritzt, beispielsweise in folgender Form:

    $$\cancel{\text{IIII}}\;\cancel{\text{IIII}}\;\cancel{\text{IIII}}\;\cancel{\text{IIII}}\;\text{III} = 23$$

  - Im römischen Additionssystem wurden folgende Grundziffern definiert:

    $$\text{I} = 1,\ \text{V} = 5,\ \text{X} = 10,\ \text{L} = 50,\ \text{C} = 100,\ \text{D} = 500,\ \text{M} = 1000$$

    Die einzelnen Ziffern einer Zahl werden in dieser Notationsweise hintereinander geschrieben, wobei die größte Ziffer üblicherweise am Anfang steht. Ihre Werte werden addiert. Steht jedoch I vor V oder X, X vor L oder C, C vor D oder M, so wird der voranstehende kleinere Wert vom nachfolgenden größeren subtrahiert, beispielsweise:[1]

    $$\text{MCMLXIX} = 1969$$

  Additionssysteme haben allgemein den Nachteil, bei großen Zahlen schnell unleserlich zu werden.

- Bei *Positionssystemen* werden die mit einem sich durch die Position ergebenden Stellenwert multiplizierten Werte der Ziffern addiert. Hierbei ist die Wahl der Basis und somit die Anzahl der Ziffern von grundlegender Bedeutung,

[1] Die “Hilfsziffern” V, L und D werden niemals größeren vorangestellt und kommen auch höchstens einmal je Zahl vor.

Beispiele:

- Die Babylonier nutzten bevorzugt ein Zahlensystem, das auf der Zahl 60 beruhte ("Sexagesimalsystem"). Noch heute wird es für Zeit- und Winkelangaben genutzt.
- An das nicht mehr verwendete "Duodezimalsystem" erinnern heute noch im Warenhandel gebräuchliche Begriffe wie "Dutzend" (12) oder "Gros" ($144 = 12 \cdot 12$).
- In der Mathematik sind weltweit Zahlensysteme mit der Basis 10 und ihren Potenzen am weitesten verbreitet. In der Informatik spielt die Basis 2 und ihre Potenzen eine entscheidende Rolle.

Praktisch werden heutzutage fast ausschließlich Positionssysteme verwendet, da sich hiermit auch große Zahlen sowie Bruchzahlen mit großer Genauigkeit darstellen lassen.

Das Dezimalsystem

Das Dezimalsystem ist ein Positionssystem mit der Basis 10. Daraus ergeben sich als Positionsfaktoren folgende Werte:

$$1 = 10^0,\ 10 = 10^1,\ 100 = 10^2,\ 1000 = 10^3,\ \ldots$$

Mit diesen Positionsfaktoren ("Stellenwerten") werden die einzelnen Ziffern einer Zahl von rechts beginnend multipliziert.

Beispiel:

$$4\,538 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Im umgekehrten Fall kann man eine Zahl durch wiederholte Division durch die Basis in Form ihrer Divisionsreste darstellen:

Beispiel:

$$\begin{aligned} 4\,538 &= 453 \cdot 10 + 8 \\ 453 &= 45 \cdot 10 + 3 \\ 45 &= 4 \cdot 10 + 5 \\ 4 &= 0 \cdot 10 + 4 \end{aligned}$$

Die Dezimalziffern der darzustellenden Zahl entsprechen den Divisionsresten, sofern diese von unten nach oben abgelesen werden. Diese Darstellungsweise wird insbesondere bei der Konvertierung angewendet, d.h. der Übertragung einer Zahl aus einem Zahlensystem in ein anderes.

Das Binärsystem

Das Binärsystem (auch "Dualsystem" genannt) ist ein Positionssystem mit der Basis 2. Daraus ergeben sich als Positionsfaktoren folgende Werte:

$$1 = 2^0,\ 2 = 2^1,\ 4 = 2^2,\ 8 = 2^3,\ 16 = 2^4,\ \ldots$$

Um eine Dezimalzahl in eine Binärzahl umzuwandeln, wird die im vorherigen Abschnitt beschriebene Methode der Division mit Rest angewendet. Die Binärzahl ergibt sich aus der Dezimalzahl durch wiederholte Division mit 2, wobei das Ergebnis an den Divisionsresten von unten nach oben abgelesen werden kann.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
4\,538 &= 2\,269 \cdot 2 + 0 \\
2\,269 &= 1\,134 \cdot 2 + 1 \\
1\,134 &= 567 \cdot 2 + 0 \\
567 &= 283 \cdot 2 + 1 \\
283 &= 141 \cdot 2 + 1 \\
141 &= 70 \cdot 2 + 1 \\
70 &= 35 \cdot 2 + 0 \\
35 &= 17 \cdot 2 + 1 \\
17 &= 8 \cdot 2 + 1 \\
8 &= 4 \cdot 2 + 0 \\
4 &= 2 \cdot 2 + 0 \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\
1 &= 0 \cdot 2 + 1
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad 4\,538_{10} = 1000110111010_2$$

Um den Wechsel des Zahlensystems klar erkennbar zu machen, wird häufig die jeweilige Zahlenbasis (2 bzw. 10) über einen entsprechenden Index angedeutet.

Soll im umgekehrten Fall eine Binärzahl in eine Dezimalzahl konvertiert werden, so müssen die auftretenden Ziffern mit ihren jeweiligen Positionsfaktoren multipliziert und die Ergebnisse anschließend aufsummiert werden.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
1000110111010_2 &= 1 \cdot 2^{12} + 0 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 \\
&\quad + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\
&= (4096 + 256 + 128 + 32 + 16 + 8 + 2)_{10} \\
&= 4\,538_{10}
\end{aligned}
$$

Auch wenn die langen Abfolgen von Einsen und Nullen im ersten Moment als ungewöhnlich erscheinen, so haben sie sich insbesondere bei der Entwicklung von Computer-Systemen als fundamental wichtig erwiesen. Auch nach dem heutigen Stand der Technik erleichtern Binärzahlen das Speichern und Übertragen von Daten erheblich und machen ihre Verarbeitung mit Hilfe von Microcontrollern überhaupt erst möglich.

Exkurs: Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ stellt eine zusätzliche Erweiterung der reellen Zahlen dar. Ein ursprüngliches Ziel dieser Erweiterung war es, auch die Rechenoperation des

Wurzelziehens uneingeschränkt mit allen Zahlen des zugrunde liegenden Zahlenbereichs ausführbar zu machen, also auch Wurzeln mit negativen Argumenten zu definieren.

Um eine Lösung für eine Wurzel mit negativem Argument angeben zu können, wird formal eine "imaginäre Einheit" i eingeführt, welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$i = \sqrt{-1} \tag{45}$$

Die Menge $\mathbb{I}$ der imaginären Zahlen entspricht der Menge an Zahlen, die man erhält, wenn man die imaginäre Einheit i mit einem beliebigen (reellen) Vielfachen b multipliziert:

$$\mathbb{I} = \{b \cdot i \mid b \in \mathbb{R} \text{ und } i = \sqrt{-1}\}$$

Bildet man die Summe aus einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl $b \cdot i$, so erhält man eine komplexe Zahl z:

$$z = a + b \cdot i \tag{46}$$

Für die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen gilt entsprechend:

$$\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ und } i = \sqrt{-i}\}$$

Jede komplexe Zahl z setzt sich somit aus einem "Realteil" a und einem "Imaginärteil" $b \cdot i$ zusammen. Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ stellen dabei eine Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ dar, für die $b = 0$ gilt.

Rechnen mit komplexen Zahlen

Die Rechenregeln für reelle Zahlen lassen sich weitgehend auf komplexe Zahlen übertragen, wenn man $i = \sqrt{-1}$ beziehungsweise die dazu äquivalente Beziehung $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ beachtet.

- Addiert beziehungsweise subtrahiert man zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2, so erhält man eine neue komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil gleich der Summe beziehungsweise Differenz der Real- und Imaginärteile von z_1 und z_2 ist:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b2 \cdot i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i \\ z_1 - z_2 &= (a_1 + b_1 \cdot i) - (a_2 + b2 \cdot i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i \end{aligned} \tag{47}$$

- Multipliziert man zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 miteinander, so erhält man eine neue komplexe Zahl, indem man alle Komponenten beider Zahlen miteinander multipliziert und hierbei $i^2 = -1$ setzt.[1]

[1] Explizit kommt Gleichung (48) folgendermaßen zustande:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) \\ &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot a_2 \cdot i + b_1 \cdot b_2 \cdot i^2 \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \cdot i \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde die Beziehung $i^2 = -1$ genutzt. Zusätzlich wurden die bei der Multiplikation entstandenen realen und imaginären Anteile sortiert und durch Klammern zusammen gefasst.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) \cdot i \qquad (48)$$

- Dividiert man eine komplexe Zahl z_1 durch eine andere komplexe Zahl z_2 miteinander, so erhält man eine neue komplexe Zahl, indem man den Bruch um die so genannte "komplex konjugierte" Zahl $z_2^* = a_2 - b_2 \cdot i$ des Nenners erweitert:[23]

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 \cdot i}{a_2 + b_2 \cdot i} = \frac{(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 - b_2 \cdot i)}{(a_2 + b_2 \cdot i) \cdot (a_2 - b_2 \cdot i)} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2) \cdot i}{{a_2}^2 + {b_2}^2} \qquad (49)$$

Gaußsche Zahlenebene und Polarform

Komplexe Zahlen lassen sich zwar nicht auf einer Zahlengeraden, dafür aber als Punkte einer Zahlenebene (zu Ehren von Carl Friedrich Gauss auch "Gauss'sche Ebene" genannt) darstellen, die von einer reellen und dazu senkrecht stehenden imaginären Zahlenachse aufgespannt wird.

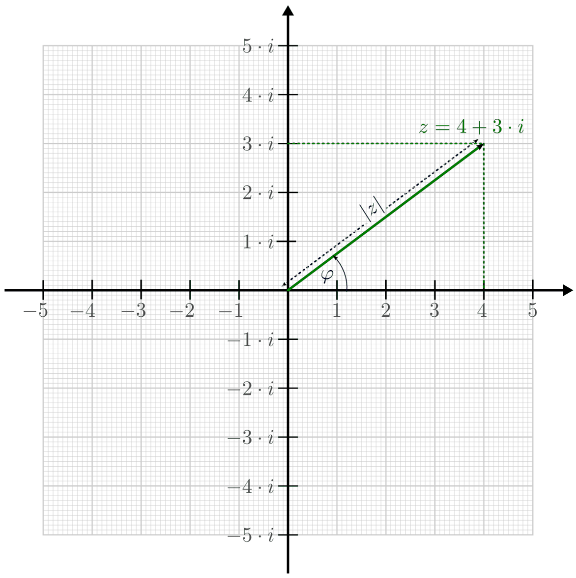


Abb. 24: Darstellung der komplexen Zahl $z = 4 + 3 \cdot i$ anhand der Gauss'schen Zahlenebene.

[2] Die Multiplikation einer komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$ mit ihrer komplex konjugierten Zahl $z^* = a - b \cdot i$ ergibt die (reelle) Zahl $a^2 + b^2$:

$$(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + a \cdot b \cdot i - b \cdot a \cdot i - b^2 \cdot i^2 = a^2 + b^2$$

Hierbei wurde wiederum die Beziehung $i^2 = -1$ genutzt.

[3] Mit Hilfe der Divisionsformel (49) kann beispielsweise auch der Kehrbruch einer komplexen Zahl bestimmt werden. Es gilt:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + b \cdot i} = \frac{1 \cdot (a - b \cdot i)}{(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i)} = \frac{a - b \cdot i}{a^2 + b^2}$$

Eine komplexe Zahl lässt sich in der Gauss'schen Ebene entweder anhand ihrer Koordinaten (Real- und Imaginärteil) oder anhand der Länge $|z|$ und Richtung φ ihres Zeigers bestimmen. Die Länge des Zeigers, die vom Koordinatenursprung zum Ort der Zahl führt, ist eine nicht negative reelle Zahl:

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{50}$$

Hierbei wird wiederum genutzt, dass das Produkt einer komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$ mit ihrer konjugiert komplexen Zahl $z^* = a - b \cdot i$ gleich der reellen Zahl $z \cdot z^* = a^2 + b^2$ ist. In der Gauss'schen Ebene kann die komplex konjugierte Zahl z^* durch eine vertikale Spiegelung von z an der reellen Zahlenachse bestimmt werden.

Der Zusammenhang zwischen dem Real- und Imaginärteil von z, ihrem Betrag $|z|$ und dem Winkel φ ihres Zeigers kann mittels der trigonomischen Größen $\sin$ und $\cos$ formuliert werden. Es gilt:

$$a = |z| \cdot \cos\varphi$$
$$b = |z| \cdot \sin\varphi$$

Jede komplexe Zahl kann somit neben der Koordinatenform auch in einer so genannten "Polarform", also über die Angabe ihres Betrags $|z|$ und Winkels φ, in folgender Weise angegeben werden:

$$z = a + b \cdot i = |z| \cdot \cos\varphi + |z| \cdot \sin\varphi \cdot i$$

beziehungsweise

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

... to be continued ...

Elementare Algebra

Die Algebra kann, vereinfacht gesagt, als Lehre von den mathematischen Gleichungen angesehen werden. In der allgemeinen Algebra werden zusätzlich auch über Zahlenbereiche hinausgehende Strukturen (Mengen und Verknüpfungen zwischen ihren Elementen) untersucht.

Gleichungen

Algebraische Aufgaben bestehen oftmals darin, eine Gleichung nach einer bestimmten Variablen (häufig: x) aufzulösen, also zu prüfen, ob eine eindeutige Lösung der Gleichung existiert oder ob keine beziehungsweise unendlich viele Lösungen auftreten können.

Eigenschaften von Gleichungen

Eine Gleichung entspricht einer *Aussageform*, bei der zwei Terme T_1 und T_2 durch die Gleichheits-Relation $=$ miteinander verbunden sind:

$$T_1 = T_2 \tag{51}$$

Als Aussageform ist eine Variablengleichung weder wahr noch falsch. Belegt man allerdings die Variablen mit zulässigen Werten, so nehmen die einzelnen Terme bestimmte Werte an – die Gleichung wird hierbei zu einer wahren oder falschen Aussage.[1] Ergibt sich eine wahre Aussage, so wird die Gleichung durch die eingesetzten Zahlen erfüllt. Diese Zahlen werden als Lösungen der Gleichung bezeichnet, die Gesamtheit aller Lösungen wird Lösungsmenge $\mathbb{L}$ genannt.

Im einfachsten Fall entsprechen die beiden Terme T_1 und T_2 zwei einzelnen Elementen x_1 und x_2 einer Menge $\mathbb{M}$. Diese können entweder gleich ($x_1 = x_2$) oder ungleich ($x_1 \neq x_2$) sein. Im ersten Fall stehen die Variablen x_1 und x_2 für das selbe Objekt.

[1] Tritt eine Variable in einem Term beziehungsweise in einer Gleichung mehrfach auf, so muss sie beim Ersetzen durch einen konkreten Wert an jeder Stelle durch ein und den selben Wert ersetzt werden.

In Termen oder Gleichungen mit mehreren Variablen können unterschiedliche Variablen mit beliebigen (gleichen oder verschiedenen) Werten belegt werden.

Lösbarkeit von Gleichungen

Ob eine Gleichung lösbar ist, hängt von der Gleichung selbst sowie von dem vorgegebenen Variablenbereich ("Definitionsmenge" $\mathbb{D}$) ab.

- Ist die Lösungsmenge leer ($\mathbb{L} = \emptyset$), so ist die Gleichung bezüglich $\mathbb{D}$ unerfüllbar.
- Ist die Lösungsmenge gleich der Definitionsmenge ($\mathbb{L} = \mathbb{D}$), so ist die Gleichung bzgl. $\mathbb{D}$ stets erfüllt ("allgemeingültig").
- Grundsätzlich ist die Lösungsmenge eine Teilmenge der Definitionsmenge ($\mathbb{L} \subseteq \mathbb{D}$).

Allgemeingültige Gleichungen (auch "Identitäten" genannt) werden oftmals als Rechenregeln verwendet, da sie unabhängig vom Wert der Variablen stets wahr sind und somit zur Vereinfachung einzelner Terme genutzt werden können. Gilt nämlich $a = b$, so kann in jeder Aussage nach Belieben a durch b ersetzt werden (Ersetzbarkeits-Theorem von Leibniz).

Ebenfalls können nach diesem Prinzip auch zwei Terme, die jeweils mit einem dritten übereinstimmen, gleichgesetzt werden. Gilt nämlich $a = b$ und $b = c$, so folgt aus der *Äquivalenz* der Gleichheitsrelation automatisch auch $a = c$:

$$a = b \quad \text{und} \quad b = c \quad \Rightarrow \quad a = c \tag{52}$$

Bei algebraischen Aufgaben muss die Lösungsmenge einer Gleichung meist erst bestimmt werden. Als Unterscheidung zu den stets wahren Identitäten werden derartige Gleichungen, deren Lösungsmenge erst gefunden werden muss, auch "Bestimmungsgleichungen" genannt.

Beispiele:

- Folgende Gleichung ist für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ unerfüllbar:

  $$x = x + 1$$

  Für die Lösungsmenge gilt somit $\mathbb{L} = \emptyset$.
- Folgende Gleichung ist für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ allgemeingültig:

  $$x - x = 0$$

  Für die Lösungsmenge gilt somit $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.
- Folgende Gleichung liefert nicht für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine wahre Aussage:

  $$3 \cdot x = 2 \cdot x + 5$$

  Die Lösungsmenge ist somit eine Teilmenge des Definitionsbereichs. Konkret gilt $\mathbb{L} = \{5\}$.

Ist die Lösungsmenge einer Gleichung nicht unmittelbar erkennbar, so kann diese durch entsprechende Umformungen in eine einfacher zu lösende Form gebracht werden.

Äquivalentes Umformen von Gleichungen

Manchmal lässt sich die Lösungsmenge einer Gleichung durch Einsetzen von konkreten Werten in die Variablen ("Probieren") ermitteln. Im Allgemeinen jedoch muss man eine Gleichung durch schrittweises Umformen lösen. Wesentlich hierfür ist in diesem Zusammenhang die Äquivalenz von Gleichungen.

Eine Gleichung heißt äquivalent (gleichwertig) zu einer anderen Gleichung, wenn beide die gleiche Lösungsmenge $\mathbb{L}$ bei gleicher Definitionsmenge $\mathbb{D}$ besitzen. Eine Umformung, durch die eine Gleichung in eine zu ihr äquivalente Gleichung übergeht, heißt äquivalente Umformung. Beispielsweise dürfen aufgrund der Symmetrie der Gleichheits-Relation stets die linke und die rechte Seite einer Gleichung vertauscht werden:

$$T_1 = T_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = T_1 \tag{53}$$

Termumformungen, die sich nur auf eine Seite einer Gleichung auswirken, beispielsweise *Zusammenfassen* und *Ausmultiplizieren beziehungsweise Ausklammern* von Summentermen sowie *Kürzen und Erweitern* von Bruchtermen, dürfen ebenso jederzeit vorgenommen werden.

Addiert oder subtrahiert man auf beiden Seiten einen beliebigen Term T, so ist die neue Gleichung äquivalent zur ursprünglichen. Der Wahrheitswert einer Gleichung bleibt auch unverändert, wenn beiden Seiten mit einem Term $T \neq 0$ multipliziert oder durch einen solchen dividiert werden. Somit gilt:[2]

$$\begin{aligned}
T_1 = T_2 \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 + T = T_2 + T \\
T_1 = T_2 \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 - T = T_2 - T \\
T_1 = T_2 \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 \cdot T = T_2 \cdot T \qquad (T \neq 0) \\
T_1 = T_2 \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 : T = T_2 : T \qquad (T \neq 0)
\end{aligned} \tag{54}$$

Während eine Addition oder Subtraktion eines beliebigen Terms auf beiden Seiten der Gleichung jederzeit problemlos möglich ist, ist bei der Multiplikation einer Gleichung mit einem Term beziehungsweise der Division durch einen Term T stets Vorsicht geboten. Wird hierbei die Bedingung $T \neq 0$ nicht beachtet, so können in der neuen Gleichung zusätzliche Lösungen hinzukommen beziehungsweise ursprünglich gültige Lösung verschwinden.

Beispiele:

- Die Gleichung $2 \cdot x - 3 = 4 \cdot x + 1$ hat, wie man durch Einsetzen überprüfen kann, die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2\}$. Multipliziert man beide Seiten mit x, so erhält man folgende Gleichung:

  $$x \cdot (2 \cdot x - 3) = x \cdot (4 \cdot x + 1)$$

  Die neue Gleichung hat neben der ursprünglichen Lösung (-2) auch die Lösung $x = 0$; die Lösungsmenge der neuen Gleichung ist also $\mathbb{L} = \{-2;\, 0\}$. Somit ist die neue Gleichung nicht äquivalent zur ursprünglichen Gleichung.

[2] T ist eine Zahl oder ein Term, der für alle Elemente des Definitionsbereichs der Ausgangsgleichung $T_1 = T_2$ definiert sein muss.

- Die Gleichung $(3 \cdot x + 1) \cdot (x + 2) = (2 \cdot x - 6) \cdot (x + 2)$ hat, wie man durch Einsetzen überprüfen kann, die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-7;\, -2\}$. Teilt man beide Seiten der Gleichung durch den Term $(x + 2)$, so erhält man folgende Gleichung:

  $$3 \cdot x + 1 = 2 \cdot x - 6$$

  Die neue Gleichung hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-7\}$; bei der Division ist die zweite ursprüngliche Lösung $x = -2$ entfallen. Somit ist die neue Gleichung nicht äquivalent zur ursprünglichen Gleichung.

Die äquivalenten Umformungs-Verfahren von Gleichungen beziehen sich auf die Anwendung der vier grundlegenden Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division). Werden weitere Rechenoperationen (beispielsweise Potenzieren, Wurzelziehen oder Logarithmieren) angewendet, sind oft zusätzliche Überlegungen nötig.

Eine Kontrolle der Lösungsmenge kann durch Einsetzen der Elemente in die Ausgangsgleichung ("Probe") erfolgen. Bei einer Probe ist jede Gleichungsseite getrennt auszurechnen, es dürfen also keine Gleichungsumformungen vorgenommen werden.

Beispiele für Gleichungen mit einer Variablen

Lineare Gleichungen

Bei einer linearen Gleichung tritt die Variable x nur in der ersten Potenz x^1 auf; sie darf dabei nicht im Nenner stehen. Jede lineare Gleichung kann durch äquivalente Umformungen in die allgemeine Form gebracht werden:

$$a \cdot x + b = 0 \tag{55}$$

Hierbei sind $a \neq 0$ und b beliebige Konstanten.

Um eine beliebige lineare Gleichung zu lösen, werden zunächst durch geeignetes Addieren beziehungsweise Subtrahieren alle die Variable x enthaltenden Terme auf die eine Seite, alle anderen Terme auf die andere Seite der Gleichung gebracht. Auf der Seite der Gleichung, welche die Variable x enthält, kann daraufhin x ausgeklammert und die gesamte Gleichung durch den Restterm geteilt werden. Befindet sich die Gleichung bereits in der allgemeinen Form (55), so kann direkt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} a \cdot x &= -b \\ \Rightarrow \quad x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Für die Lösungsmenge einer linearen Gleichung gilt somit $\mathbb{L} = \{-\frac{b}{a}\}$.

Beispiel:

- Wie lautet die Lösungsmenge folgender Gleichung?

  $$\frac{1}{3} \cdot x - 4 = 0 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Um die Gleichung zu lösen, sortiert man alle Variablen (im konkreten Fall alle x-Terme) auf eine Seite der Gleichung, alle Zahlen ohne Variable auf die andere Seite. Dividiert man dann durch den Koeffizienten der Variablen x, so erhält man die Lösung der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot x &= 4 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist somit $\mathbb{L} = \{12\}$

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Quadratische Gleichungen

Bei einer quadratischen Gleichung tritt die Variable x in der zweiten Potenz x^2 und gegebenenfalls zusätzlich in erster Potenz auf; sie darf dabei nicht im Nenner stehen. Jede quadratische Gleichung kann durch äquivalente Umformungen in die allgemeine Form gebracht werden:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \tag{56}$$

Hierbei sind $a \neq 0$, b und c beliebige Konstanten.

Eine quadratische Gleichung hat höchstens zwei Lösungen. Wie viele und welche Lösungen eine quadratische Gleichung im konkreten Fall hat, kann direkt bestimmt werden, wenn die Gleichung in der allgemeinen Form vorliegt. Die Anzahl an Lösungen ist durch den Wert ihrer so genannten "Diskriminante" $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ bestimmt, die anhand der allgemeinen Gleichungsform (56) unmittelbar berechnet werden kann. Damit lassen sich die folgenden drei Fälle unterscheiden:

$$\begin{aligned} D > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \right\} \\ D = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ \frac{-b}{2 \cdot a} \right\} \\ D < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = \{\} \end{aligned} \tag{57}$$

Dieses Verfahren, anhand der Diskriminante D auf die Anzahl und die Werte der Lösungen schließen zu können, wird umgangssprachlich auch als "Mitternachtsformel" bezeichnet.[1,2]

---

[1] Im ersten Fall ($D > 0$) können die beiden Lösungen x_1 und x_2 mittels des Plus-Minus-Zeichens $\pm$ auch verkürzt in folgender Form dargestellt werden:

$$D > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Im Fall $D = 0$ fallen die Lösungen x_1 und x_2 wegen $\sqrt{D} = \pm 0$ zusammen. Man spricht daher bisweilen auch von einer "doppelten" Lösung.

[2] Die Gleichung (57) gilt, sofern mit reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gerechnet wird. Rechnet man mit *komplexen Zahlen*, so hat eine quadratische Gleichung auch im Fall $D < 0$ zwei Lösungen. In diesem Fall gilt:

$$\sqrt{D} = \sqrt{(-1) \cdot (-D)} = \sqrt{i^2 \cdot (-D)} = i \cdot \sqrt{-D}$$

Sie lässt sich auf jede quadratische Gleichung anwenden, die in der allgemeinen Form (56) vorliegt.

Sonderfälle quadratischer Gleichungen

Liegen Spezialfälle von quadratischen Gleichungen vor, so können auch andere, teilweise einfachere Lösungsverfahren genutzt werden:

- Ist $b = 0$, so liegt eine quadratische Gleichung folgender Form vor:

  $$a \cdot x^2 + c = 0$$

  Diese Gleichung kann direkt nach x aufgelöst werden:

  $$a \cdot x^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

  Die Gleichung hat nur dann die beiden obigen Lösungen, wenn a und c unterschiedliche Vorzeichen haben, andernfalls ist die Lösungsmenge gleich $\{0\}$ (falls $c = 0$ ist) oder gleich der leeren Menge (falls $c \neq 0$ ist).

  Anschaulich ist die obige Gleichung daduch zu erklären, dass für das Quadrat jeder Zahl x stets $x^2 \geq 0$ gilt. Wird nun eine Quadratzahl mit einem positiven Faktor multipliziert, so kann man nicht eine weitere positive Zahl hinzu addieren, um als Ergebnis den Wert Null zu erhalten.

- Ist $c = 0$, fehlt also ein x-freier Term, so liegt eine quadratische Gleichung folgender Form vor:

  $$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$$

  Die Mitternachtsformel liefert in diesem Fall die beiden Werte $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$ als Lösungen. Die gleichen Lösungen erhält man, indem man auf der linken Seite der Gleichung x als gemeinsamen Faktor ausklammert:

  $$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (a \cdot x + b) = 0$$

  Da ein Produkt nur dann gleich Null ist, wenn (mindestens) einer der beiden Faktoren gleich Null ist, folgt aus der obigen Gleichungsform, dass entweder der $x = 0$ oder $a \cdot x + b = 0$ gelten muss. Aus dem ersten Fall folgt $x_1 = 0$, aus dem zweiten Fall (einer linearen Gleichung) folgt $x_2 = -\frac{b}{a}$.

- Ist $a = 1$, so liegt eine "normierte" quadratische Gleichung vor:

  $$1 \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Damit ergeben sich als Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2 \cdot a} \pm i \cdot \frac{\sqrt{-(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}}{2 \cdot a}$$

Jede allgemeine quadratische Gleichung mit $a \neq 1$ kann ebenfalls mittels Division durch a ebenfalls in eine normierte Form gebracht werden. Setzt man $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$, so lässt sich jede quadratische Gleichung in normierter Form darstellen:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \tag{58}$$

Sind p und q ganze Zahlen, so lassen sich die Lösungen der Gleichung bisweilen auch schnell mit Hilfe des nach dem Mathematiker François Viète benannten "Satz von Vieta" bestimmen. Hierbei wird genutzt, dass zwischen den beiden möglichen Lösungen x_1 und x_2, für die auch $x_1 = x_2$ gelten kann, folgender Zusammenhang besteht:[3]

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= +q \quad \text{und} \\ x_1 + x_2 &= -p \end{aligned}$$

Kennt man die möglichen ganzzahligen Faktoren der Zahl q, so lässt sich durch Kopfrechnen oftmals ein Zahlenpaar finden, das als Summe genau den negativen Wert von p ergibt. Dieses Zahlenpaar stellt dann die gesuchten Lösungen von Gleichung (58) dar.[4]

Produktform quadratischer Gleichungen

Sind x_1 und x_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung, wobei auch $x_1 = x_2$ zulässig ist, so kann diese allgemein auch in folgender Form dargestellt werden:

[3] Nach der "Mitternachtsformel" (57) gilt mit $a = 1$ und $D = p^2 - 4 \cdot q$:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \\ &= \left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2}\right)^2 \\ &= +\frac{p^2}{4} - \frac{D}{4} \\ &= +\frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) \\ &= +q \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \\ &= \left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2}\right) \\ &= -p \quad \checkmark \end{aligned}$$

[4] Die "Mitternachtsformel" (57) kann selbstverständlich ebenso zur Lösung von Gleichung (58) genutzt werden.

$$\begin{aligned} a \cdot x^2 + b \cdot x + c &= 0 \\ \Rightarrow a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Eine solche Aufteilung einer Gleichung in mehrere lineare Faktoren wird als Linearfaktorzerlegung oder Produktform bezeichnet. Diese Darstellung spielt für quadratische Gleichungen nur eine untergeordnete Rolle, sie kann allerdings in nützlicher Weise auch bei Gleichungen höheren Grades angewendet werden.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Algebraische Gleichungen höheren Grades

Bei einer algebraischen Gleichung n-ten Grades tritt die Variable x in der Potenz x^n und gegebenenfalls in Potenzen niederen Grades auf; sie darf dabei nicht im Nenner stehen. Jede algebraische Gleichung kann durch äquivalente Umformungen in die allgemeine Form gebracht werden:

$$a_{\mathrm{n}} \cdot x^n + a_{\mathrm{n-1}} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

Der Term auf der linken Seite der obigen Gleichung, der aus einer Summe von Vielfachen von Potenzen einer Variablen (meist x) besteht, wird allgemein als "Polynom" bezeichnet.

Algebraische Gleichungen lassen sich im Allgemeinen nur näherungsweise mit Hilfe eines geeigneten Computerprogramms[1] lösen. Eine Gleichung n-ten Grades hat dabei maximal n Lösungen. Unmittelbar rechnerisch lösbar sind Gleichungen dritten oder höheren Grades jedoch dann, wenn einer der folgenden Sonderfälle vorliegt:

- Fehlt bei einer Gleichung n-ten Grades das x-freie Glied, so kann auf der linken Gleichungsseite x ausgeklammert werden. Damit ist $x_1 = 0$ als (erste) Lösung der Gleichung gefunden. Der verbleibende Term muss als Gleichung $n-1$-ten Grades separat gelöst werden.[2] Beispielsweise lassen sich auf diese Weise Gleichungen dritten Grades ("kubische Gleichungen") auf quadratische Gleichungen zurückführen, die mit Hilfe der Mitternachtsformel gelöst werden können.
- Treten bei einer algebraischen Gleichung vierten Grades nur gerade Exponenten auf, d.h. gilt $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$, so kann die Gleichung durch die Einführung einer neuen Variablen $u = x^2$ auf eine quadratische Form gebracht werden. Dieses Verfahren wird als Substitution bezeichnet. Es gilt:

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0 \quad \overset{u=x^2}{\Longleftrightarrow} \quad a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0$$

[1] Siehe Abschnitt *Computer-Algebra-Systeme*.

[2] Hierbei ist wiederum die Überlegung grundlegend, dass ein Produkt nur dann gleich Null ist, wenn (mindestens) einer der beiden Faktoren gleich Null ist. Lösungen des restlichen Terms sind somit auch Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

Ist die neue quadratische Gleichung für u gelöst (mit den Lösungen u_1 und u_2), so können anhand der Gleichung $u = x^2$ wiederum die Lösungen der ursprünglichen Gleichung berechnet werden ("Rücksubstitution").[3] Es folgt:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{u_1} \quad \text{und}$$
$$x_{3,4} = \pm\sqrt{u_2}$$

Da Potenzieren und Wurzelziehen nicht unbedingt äquivalente Umformungen einer Gleichung darstellen, muss durch Einsetzen überprüft werden, ob die so gefundenen Werte tatsächlich Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind.

Die Substitutions-Methode ist allgemein für Gleichungen der Form $a \cdot x^{2 \cdot n} + b \cdot x^n + c = 0$ anwendbar, wenn $u = x^n$ eingesetzt wird.

- Ist eine Lösung x_1 einer algebraischen Gleichung höheren Grades bekannt oder kann sie durch Ausprobieren einfach ermittelt werden, so kann die Gleichung – wie bei einer *Linearfaktorzerlegung* – in ein Produkt aus $(x-x_1)$ und einem Restterm zerlegt werden. Dieser Restterm kann in umgekehrter Weise berechnet werden, indem man den ursprünglichen Term durch $(x - x_1)$ teilt. Es gilt somit:

  $$(a_{\mathrm{n}} \cdot x^n + a_{\mathrm{n}-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot n + a_0) : (x - x_1) = \text{Restterm}$$

  Diese so genannte "Polynomdivision" wird nach einem ähnlichen Verfahren durchgeführt wie die schriftliche Division:

  - Zunächst wird der erste Summand $a_{\mathrm{n}} \cdot x^n$ des ursprünglichen Terms durch x geteilt. Das erste Teilergebnis $a_{\mathrm{n}} \cdot x^{n-1}$ wird auf die rechte Seite des Istgleich-Zeichens geschrieben.
  - Das erste Teilergebnis wird mit $(x - x_1)$ multipliziert, das Ergebnis dieser Rechnung unter den ersten Summanden des ursprünglichen Terms geschrieben und vom ursprünglichen Term abgezogen. Zu dem sich so ergebenden Rest werden weitere Summanden des ursprünglichen Terms hinzugenommen.
  - Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis kein Rest mehr übrig bleibt.[4]

  Der Restterm hat nur noch den Grad $n - 1$ und kann üblicherweise leichter ausgewertet werden.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Bruch-, Produkt- und Wurzelgleichungen

Bruchgleichungen und Wurzelgleichungen stellen Gleichungstypen dar, die durch entsprechende Umformungen in eine algebraische Gleichung umgewandelt werden können.

[3] Hierbei gilt zu beachten, dass für reelle Zahlen keine negativen Wurzeln definiert sind. Ist u_1 und/oder u_2 negativ, so entfallen die entsprechenden Lösungen.

[4] Bliebe bei der Polynomdivision ein Rest übrig, so wäre x_1 keine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Bruchgleichungen

Als Bruchgleichung wird eine Gleichung bezeichnet, in der die Variable x mindestens einmal im Nenner steht. Hierbei ist auf den Definitionsbereich der Gleichung zu achten, da der Nenner eines Bruches niemals den Wert Null annehmen darf ("Definitionslücke"). Allgemein ist der Definitionsbereich einer Bruchgleichung gleich den reellen Zahlen ohne die Lösungen der Gleichungen, die sich ergeben, wenn man den im Nenner stehenden x-Term bzw. die im Nenner stehende x-Terme jeweils gleich Null setzt.

Um eine Bruchgleichung zu lösen, wendet man folgende Methode an:

1. Zunächst werden die einzelnen Bruchterme durch passende Erweiterungen auf den Hauptnenner gebracht – wahlweise durch Multiplikation aller Nennerterme oder durch Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nennerterme.[1]
2. Multipliziert man dann die Gleichung mit dem Hauptnenner $N \neq 0$, so entfallen alle Brüche (da der Hauptnenner in allen Bruchtermen gekürzt werden kann beziehungsweise $0 \cdot N = 0$ gilt).

Die übrig bleibenden Terme stellen oftmals eine algebraische Gleichung dar, häufig ersten oder zweiten Grades, die mit Hilfe der in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Verfahren gelöst werden kann.

Beispiel:

- Die Lösungsmenge folgender Gleichung soll bestimmt werden:

$$\frac{4 \cdot x - 2}{x - 5} = \frac{3 \cdot x + 8}{x + 2}$$

Damit keiner der beiden Nenner gleich Null ist, muss $x \neq 5$ und $x \neq -2$ gelten. Zur Lösung der Gleichung werden die Terme auf beiden Seiten mit dem Hauptnenner $(x - 5) \cdot (x + 2)$ multipliziert. Beide Brüche können anschließend gekürzt werden:

$$\frac{(4 \cdot x - 2\ \ ) \cdot (x - 5) \cdot (x + 2)}{(x - 5)} = \frac{(3 \cdot x + 8) \cdot (x - 5) \cdot (x + 2)}{(x + 2)}$$

$$\Rightarrow \quad (4 \cdot x - 2) \cdot (x + 2) = (3 \cdot x + 8) \cdot (x - 5)$$

Die so gekürzte Gleichung entspricht einer algebraischen Gleichung zweiten Grades. Nach dem Ausmultiplizieren kann sie wie üblich umgeformt und gelöst werden:

$$4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 2 \cdot x - 4 = 3 \cdot x^2 - 15 \cdot x + 8 \cdot x - 40$$

$$\Rightarrow \quad 1 \cdot x^2 + 13 \cdot x + 36 = 0$$

[1] Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nennerterme lässt sich oftmals mit weniger Rechenaufwand berechnen, sofern diese in Form von (Linear-)Faktoren vorliegen. Das kgV ist in diesem Fall gleich dem Produkt der kleinsten Potenzen aller in den Nennern auftretenden Faktoren.

Eine Zerlegung der Nennerterme in mehrere (Linear-)Faktoren ist genau dann möglich, wenn bereits eine oder mehrere Definitionslücken x_{i} gefunden wurden. Mit Hilfe dieser Werte lassen sich die Nennerterme jeweils als $(x - x_{\mathrm{i}}) \cdot$ Rest darstellen.

Nach der *Mitternachtsformel* gilt:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-13 \pm 5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -9 \quad \text{und} \quad x_2 = -4$$

Die Lösungsmenge der Bruchgleichung lautet somit $\mathbb{L} = \{-9,\ -4\}$.

Verhältnisgleichungen

Ein (vergleichsweise) einfacher Sonderfall einer Bruchgleichung liegt vor, wenn die Variable x nur ein einziges Mal auf einer Seite der Gleichung im Nenner oder Zähler vorkommt, beispielsweise bei $\frac{9}{4} = \frac{x}{6}$ oder allgemein $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$, wobei a, b und c beliebige, aber bekannte Werte bezeichnen. Derartige Gleichungen werden als Verhältnisgleichungen bezeichnet und können genutzt werden, um eine unbekannte Größe zu berechnen, wenn drei andere Größen bekannt sind und sich die Zahlenverhältnisse zwischen den Größen nicht ändern, die Größen also zueinander "proportional" sind.

Steht die Variable x bei einer Verhältnisgleichung im Zähler eines Terms, so genügt es, beide Seiten der Gleichung mit dem entsprechenden Nenner zu multiplizieren, um den gesuchten Wert zu erhalten.

Beispiel:

- Für ein Brotrezept werden 500 g Mehl für 800 g Brot benötigt. Wieviel Gramm Mehl würde man (theoretisch) benötigen, um 3000 g Brot zu backen?

  Die gesuchte Mengenangabe x steht hierbei im gleichen Verhältnis zur Zahl 3000 wie 500 zu 800, also:

  $$\frac{500}{800} = \frac{x}{3\,000}$$

  Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit 3000, so lässt sich der gesuchte Wert (nach dem Kürzen des Bruchs) unmittelbar ablesen:

  $$x = \frac{500 \cdot 3\,000}{800} = \frac{5 \cdot 3\,000}{8} = 1\,875$$

  Für 3000 g Brot wären somit 1 875 g Mehl nötig.

Tipp: Steht die Variable x bei einer Verhältnisgleichung im Nenner, so empfiehlt es sich, die Brüche auf beiden Seiten der Gleichung durch ihre Kehrbrüche zu ersetzen; dadurch hat man die Aufgabe auf die obige Form zurückgeführt. Es genügt dann wiederum, den Zahlenterm mit dem zur Variablen gehörenden Nenner zu multiplizieren.

Produktgleichungen

Neben der obigen Form der (direkten) Proportionalität kann es auch vorkommen, dass eine Größe immer kleiner wird, wenn eine andere Größe zunimmt. Beispielsweise nimmt die Zeit, die man für eine bestimmte Wegstrecke benötigt, mit zunehmender Geschwindigkeit ab. Ein solcher Zusammenhang zwischen zwei Größen x_1 und x_2 wird als indirekte Proportionalität bezeichnet und kann formal als Produktgleichung geschrieben werden:

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

Hierbei ist c ein bekannter, konstanter Wert. Eine solche Gleichung kann nur in zwei Fällen eindeutig gelöst werden:

- wenn eine der beiden Größen x_1 oder x_2 ein ebenfalls bekannter Wert a ist, die Gleichung also in der trivialen Form $a \cdot x = c$ mit der Lösung $x = \frac{c}{a}$ geschrieben werden kann, oder
- wenn eine zweite Gleichung für x_1 oder x_2 angegeben werden kann. Bei indirekten Proportionalitäten handelt es bei dieser ebenfalls um eine (triviale) Produktgleichung der Form $b \cdot x_{1|2} = c$.

Bei vielen Aufgaben bleibt somit eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, die allgemein folgende Form hat:

$$a \cdot b = c \cdot x \tag{59}$$

Zur besseren Lesbarkeit wurde hierbei der Index von x weggelassen, zumal ohnehin nur *eine* Größe gesucht wird. Die Gleichung kann somit einfach gelöst werden, indem durch den Faktor c dividiert wird:

$$a \cdot b = c \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a \cdot b}{c}$$

Die gesuchte Größe lässt sich also als Verhältnis der übrigen Größen beschreiben. Damit stimmen Produktgleichungen formal mit Verhältnisgleichungen überein, denn offensichtlich sind beide Gleichungsformen äquivalent:

$$\frac{a}{x} = \frac{c}{b} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a \cdot b}{c}$$

Es hängt von der Aufgabenstellung ab, ob eine Gleichung eher als Produkt- oder als Verhältnisgleichung angegeben wird; liegt zwischen zwei untersuchten Größen eine direkte Proportionalität vor, so wird der Zusammenhang meist als Verhältnisgleichung, bei indirekter Proportionalität als Produktgleichung angegeben.

Die Sonderform $x = c$

Eine Sonderform der Produktgleichung (59) liegt dann vor, wenn die gesuchte Größe x der gegebenen Größe c entsprechen soll, also die Lösung für eine Gleichung mit folgender Form gesucht wird:

$$a \cdot b = c \cdot c = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = c = \sqrt{a \cdot b}$$

In diesem Fall wird $x = a \cdot b$ als mittlere Proportionale und $x = \sqrt{a \cdot b}$ als geometrisches Mittel von a und b bezeichnet. Formal beschreibt x dabei das mittlere Folgenglied einer *geometrischen Folge*, das zwischen a und b liegt; der konstante Faktor der Folge ist hierbei $q = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Dreisatz-Aufgaben

Wie die obigen Beispiele zeigen, lassen sich mit Verhältnis- und Produktgleichungen so genannte “Dreisatz-Aufgaben” lösen. Diese heißen so, weil sie üblicherweise in drei Schritten gelöst werden:

1. Zunächst wird ein *Bedingungssatz* formuliert, der eine Aussage über das gegebene Größenverhältnis macht.

   Beispiel: Ein Containerschiff benötigt für eine Strecke von $s_1 = 800\,\mathrm{km}$ eine Zeit von $t_1 = 16\,\mathrm{h}$. Der Bedingungssatz lautet also:

   $$800\,\mathrm{km} \mathrel{\widehat{=}} 16\,\mathrm{h}$$

   Über dem Ist-Gleich-Zeichen wird dabei häufig ein Dach-Symbol geschrieben, da die linke Seite der Gleichung mit der rechten Seite zwar in einem bestimmten Verhältnis seht, aber nicht mit dieser identisch ist.

2. Anschließend wird ein *Fragesatz* formuliert, der die gesuchte Größe x beinhaltet. Der Fragesatz ergibt gemeinsam mit dem Bedingungssatz ein System zweier Gleichungen, die aufgrund der festen Proportionalitäten als eine Verhältnisgleichung geschrieben werden können.

   Beispiel: Wie lange braucht das obige Containerschiff für eine $s_2 = 2500\,\mathrm{km}$ lange Strecke? Der Fragesatz lautet in diesem Fall:

   $$2500\,\mathrm{km} \mathrel{\widehat{=}} ?$$

3. Mit dem *Schlußsatz* wird die gesuchte Größe (x oder ?) berechnet, indem jeweils das Verhältnis der linken und der rechten Seiten der obigen Gleichungen gebildet wird. Vorzugsweise teilt man dabei die zweite Gleichung durch die erste, so dass die gesuchte Größe im Zähler steht. Es folgt für das obige Beispiel:

   $$\frac{2500\,\mathrm{km}}{800\,\mathrm{km}} = \frac{?}{16\,\mathrm{h}}$$

   Aus dem Schlusssatz kann die gesuchte Größe unmittelbar berechnet werden

   $$? = \frac{25 \cdot 16\,\mathrm{h}}{8}$$
   $$\Rightarrow ? = 50\,\mathrm{h}$$

Bisweilen werden Dreisatz-Aufgaben auch gelöst, indem zunächst auf eine Einheit der Grundgröße “herunter gerechnet” wird; im obigen Beispiel könnte man zunächst ausrechnen, wie lange das Schiff für eine Strecke von $1\,\mathrm{km}$ benötigt (Ergebnis: $0,02\,$Stunden). Damit kann dann auf die gesuchte Zeit “hoch gerechnet” werden, indem man die Zeit je Kilometer mit der gegebenen Anzahl an Kilometern multipliziert. Im Allgemeinen bedeutet dieses Lösungsverfahren gegenüber der oben genannten Methode jedoch einen erhöhten Rechenaufwand.

Wurzelgleichungen

Als Wurzelgleichung wird eine Gleichung bezeichnet, in der die Variable x mindestens einmal im Argument einer Wurzel steht. Hierbei muss gegebenenfalls der Definitionsbereich der Variablen eingeschränkt werden, da im Bereich der reellen Zahlen negative Wurzeln nicht definiert sind.[2]

Wurzelgleichungen lassen sich üblicherweise durch folgendes Verfahren lösen:

1. Zunächst wird eine Wurzel durch geeignete Umformungen isoliert, also allein auf eine Seite der Gleichung gebracht.
2. Anschließend werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelexponenten (bei einer Quadratwurzel mit zwei) potenziert. Falls bei der sich ergebenden noch immer Wurzeln auftreten, wiederholt man dieses Verfahren, bis alle Wurzeln eliminiert sind.

Die neue Gleichung entspricht oftmals einer algebraischen Gleichung, häufig ersten oder zweiten Grades, die mit Hilfe der in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Verfahren gelöst werden kann.

Da das Potenzieren mit einem geradzahligen Exponenten keine Äquivalenzumformung darstellt, kann die umgeformte Gleichung (Schein-)Lösungen besitzen, die keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind. Eine Probe durch Einsetzen der gefundenen Werte in die ursprüngliche Gleichung oder durch Vergleich der gefundenen Lösungen mit dem Definitionsbereich der Gleichung ist somit zwingend erforderlich.

Beispiel:

- Die Lösungsmenge folgender Gleichung soll bestimmt werden:

  $$\sqrt{4 \cdot x - 3} - 2 \cdot x + 1 = 0$$

  Damit unter der Wurzel kein negativer Wert steht, muss $4 \cdot x - 3 \ge 0$ gelten, also $x \ge 0,75$. Zur Lösung der Gleichung wird zunächst die Wurzel isoliert, d.h. alle übrigen Terme auf die rechte Seite der Gleichung gebracht:

  $$\sqrt{4 \cdot x - 3} \; = +2 \cdot x - 1$$

  Nun kann die Gleichung quadriert werden. Es folgt:

  $$\begin{aligned} \left(\sqrt{4 \cdot x - 3}\right)^2 &= (2 \cdot x - 1)^2 \\ 4 \cdot x - 3 &= 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 \end{aligned}$$

  Die quadrierte Gleichung entspricht in diesem Fall einer algebraischen Gleichung zweiten Grades. Sie kann wie üblich umgeformt und gelöst werden:

  $$\begin{aligned} 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 4 &= 0 \\ 4 \cdot (x-1)^2 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

[2] Für jeden unter einer Wurzel stehenden Term $\sqrt{T}$ ist die *Ungleichung* $T \ge 0$ zu lösen. Die Definitionsmenge entspricht dann der Schnittmenge der Lösungsintervalle.

Der gefundene Wert $x = 1$ stellt auch, wie man durch Einsetzen leicht überprüfen kann, eine Lösung der ursprünglichen Gleichung dar. Somit lautet die Lösungsmenge der Wurzelgleichung $\mathbb{L} = \{1\}$.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Exponential- und Logarithmusgleichungen

Exponentialgleichungen

Bei Exponentialgleichungen steht die Variable x im Exponenten mindestens eines Terms. Derartige Gleichungen sind im Allgemeinen nur näherungsweise unter Verwendung von Computerprogrammen lösbar.

In Spezialfällen sind Exponentialgleichungen allerdings auch bei Verwendung eines üblichen Taschenrechners lösbar, nämlich dann, wenn auf beiden Seiten ausschließlich konstante Terme oder Terme der Form $a^{T(x)}$ stehen; $T(x)$ soll dabei für einen beliebigen, von der Variablen x abhängigen Term stehen.

Wenn eine derartige Gleichung eine Lösung besitzt, also die linke Seite der Gleichung der rechten entspricht, dann muss ebenfalls der *Logarithmus* der linken und der rechten Seite gleich sein. Dieser Rechentrick ermöglicht die Verwendung der folgenden Identität:[1]

$$\log_{\mathrm{a}} a^x = x$$

Durch das "Logarithmieren" einer Gleichung kann somit ein im Exponenten stehender, von der Variablen x abhängiger Term in einen gewöhnlichen Term umgewandelt werden. Dieser kann, je nach Art des Terms, weiter vereinfacht und ausgewertet werden.

Beispiele:

- Die Lösung folgender Gleichung soll bestimmt werden:

$$10^{2 \cdot x} = 50$$

  Das Logarithmieren beider Seiten führt auf folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \log_{10} 10^{2 \cdot x} &= \log_{10} 50 \\ \Rightarrow 2 \cdot x &= \log_{10} 50 \\ x &= \frac{\log_{10} 50}{2} \approx \frac{1,7}{2} = 0,85 \end{aligned}$$

  Somit hat die Gleichung die Lösung $x \approx 0,85$.

[1] Der Logarithmus $\log_{\mathrm{a}} a^x$ ist gleich derjenigen Zahl, mit der man a potenzieren muss, um a^x zu erhalten. Offensichtlich muss man a mit x potenzieren, um a^x zu erhalten. Somit ist $x = \log_{\mathrm{a}} a^x$ für jede frei wählbare Basis a und beliebige Werte der Variablen x.

- Die Lösung folgender Gleichung soll bestimmt werden:

$$2^x = 3^{2-5\cdot x}$$

Das Logarithmieren beider Seiten führt auf folgende Gleichung:

$$\log_2 2^x = \log_2 3^{2-5\cdot x}$$

Hierbei können die *Rechenregeln für Logarithmen* genutzt werden. Da $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ gilt, kann die Gleichung weiter vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} x \cdot \log_2 2 &= (2 - 5 \cdot x) \cdot \log_2 3 \\ 5 \cdot x \cdot \log_2 3 + x \cdot \log_2 2 &= 2 \cdot \log_2 3 \\ x \cdot (5 \cdot \log_2 3 + 1 \cdot \log_2 2) &= 2 \cdot \log_2 3 \\ x &= \frac{2 \cdot \log_2 3}{5 \cdot \log_2 3 + 1 \cdot \log_2 2} \approx 0,355 \end{aligned}$$

Somit hat die Gleichung die Lösung $x \approx 0,355$.

Tritt die Variable x sowohl im Exponenten eines Terms als auch als Basis eines anderen Terms auf, so ist die Gleichung nur näherungsweise mit Computerprogrammen lösbar. Besteht die Gleichung hingegen ausschließlich aus Termen mit gleicher Basis und der Variablen x im Exponenten, so heben sich die Exponentialterme durch das Logarithmieren gegenseitig auf, und es können ausschließlich die Exponenten verglichen werden.

Beispiel:

- Die Lösungen folgender Gleichung soll bestimmt werden:

$$e^{3\cdot x} = e^{x^2-10}$$

Hierbei bezeichnet $e \approx 2,718$ die Eulersche Zahl. Das Logarithmieren beider Seiten führt auf folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \ln e^{3\cdot x} &= \ln e^{x^2-10} \\ \Rightarrow 3 \cdot x &= x^2 - 10 \end{aligned}$$

Somit muss nur die sich ergebende quadratische Gleichung gelöst werden. Die Lösungen lassen sich in diesem Fall einfach mit dem *Satz von Vieta* bestimmen:

$$\begin{aligned} & x^2 + 3 \cdot x - 10 = 0 \\ & \Rightarrow x_1 = -5 \quad \text{und} \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung lautet somit $\mathbb{L} = \{-5,\ +2\}$.

Logarithmusgleichungen

Bei Logarithmusgleichungen tritt die Variable x mindestens einmal als Argument eines Logarithmus auf. Im Allgemeinen sind solche Gleichungen nur näherungsweise unter Verwendung von Computerprogrammen lösbar.

Logarithmusgleichungen sind – ebenso wie Exponentialgleichungen – nur dann unter Verwendung eines üblichen Taschenrechners lösbar, wenn auf beiden Seiten ausschließlich konstante Terme oder Terme der Form $\log_{\mathrm{a}} T(x)$ auftreten, wobei a die Basis des Logarithmus bezeichnet und $T(x)$ für einen beliebigen, von der Variablen x abhängigen Term steht.

Wenn eine derartige Gleichung eine Lösung besitzt, also die linke Seite der Gleichung der rechten entspricht, dann muss die Gleichung ebenfalls gelten, wenn man eine der Basis a des Logarithmus entsprechende Zahl mit den Termen auf beiden Seiten potenziert. Dieser Rechentrick ermöglicht die Verwendung der folgenden Identität:[2]

$$a^{\log_{\mathrm{a}} x} = x$$

Durch das "Exponenzieren" einer Gleichung kann somit ein im Argument eines Logarithmus stehender, von der Variablen x abhängiger Term in einen gewöhnlichen Term umgewandelt werden. Dieser kann, je nach Art des Terms, weiter vereinfacht und ausgewertet werden.

Beispiel:

- Die Lösung folgender Gleichung soll bestimmt werden:

  $$\log_5 x^2 = 4$$

  Das Exponenzieren beider Seiten führt auf folgende Gleichung:

  $$\begin{aligned} 5^{\log_5 x^2} &= 5^4 \\ x^2 &= 625 \\ x &= \sqrt{625} = \pm 25 \end{aligned}$$

  Somit hat die Gleichung die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-25;\ 25\}$.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Ungleichungen

Sind zwei Terme T_1 und T_2 durch die Kleiner-als-Relation $<$ oder die Größer-als-Relation $>$ miteinander verbunden, so spricht man von einer Ungleichung.[1]

$$T_1 < T_2 \quad \text{oder} \quad T_1 > T_2 \tag{60}$$

Für Ungleichungen gilt ebenso wie für *Gleichungen*, dass man durch Belegung der Variablen mit konkreten Werten eine wahre oder falsche Aussage erhält. Die Definitionsmenge

[2] Der Logarithmus $\log_{\mathrm{a}} x$ ist gleich derjenigen Zahl, mit der man a potenzieren muss, um x zu erhalten. Offensichtlich erhält man somit x, wenn man a mit dieser Zahl potenziert. Somit gilt $x = a^{\log_{\mathrm{a}} x}$ für jede frei wählbare Basis a und beliebige Werte der Variablen x.

[1] Eine Ungleichung der Form $T_1 \le T_2$ stellt eine Vereinigung der Fälle $T_1 < T_2$ und $T_1 = T_2$ dar. Entsprechendes gilt für Ungleichungen mit der Größer-als-Relation $\ge$.

$\mathbb{D}$ einer Ungleichung ist, sofern durch die Terme T_1 und T_2 keine Einschränkung vorgegeben ist, gleich der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Ungleichungen können keine, eine, mehrere oder unendlich viele Lösungen haben. Im Allgemeinen besteht die zu bestimmende Lösungsmenge $\mathbb{L}$ aus so genannten Intervallen, also aus Teilbereichen von $\mathbb{R}$. Jedes Intervall hat eine untere Grenze a und eine obere Grenze b und umfasst somit alle Zahlen $a < b$, die zwischen diesen Grenzen liegen.

Intervalle lassen sich auf einfache Weise durch eckige Klammern angeben. Je nachdem, ob die Grenzen eines Intervalls noch zum Intervall gehören sollen oder nicht, unterscheidet man folgende Fälle:

- Für ein geschlossenes Intervall gilt $a \le x \le b$.
  Man schreibt dafür $[a\,;\,b]$.
- Für ein halboffenes Intervall gilt entweder $a \le x < b$ oder $a < x \le b$.
  Man schreibt dafür $[a\,;\,b[$ beziehungsweise $]a\,;\,b]$.
- Für ein offenes Intervall gilt $a < x < b$.
  Man schreibt dafür $]a\,;\,b[$.

Lösen von Ungleichungen

Ungleichungen lassen sich ebenso wie Gleichungen durch schrittweises Umformen lösen. Auch hierfür spielen *äquivalente Umformungen* eine wesentliche Rolle. Beispielsweise lassen sich die linke und die rechte Seite einer Ungleichung vertauschen, wenn gleichzeitig auch das Relationszeichen “umgedreht” wird:

$$T_1 < T_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_2 > T1$$

Termumformungen, die sich nur auf eine Seite einer Gleichung auswirken, beispielsweise *Zusammenfassen* und *Ausmultiplizieren beziehungsweise Ausklammern* von Summentermen sowie *Kürzen und Erweitern* von Bruchtermen, dürfen ohne Änderung des Relationszeichens jederzeit vorgenommen werden.

Eine Ungleichung bleibt zudem unverändert, wenn man auf beiden Seiten einen beliebigen Term T addiert oder subtrahiert.

$$\begin{aligned} T_1 < T_2 \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 + T < T_2 + T \\ T_1 < T_2 \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 - T < T_2 - T \end{aligned}$$

Multipliziert oder dividiert man eine Gleichung mit beziehungsweise durch einen Term T, so muss zum einen – wie bei Gleichungen – auf die Bedingung $T \neq 0$ geachtet werden, da ansonsten zusätzliche Lösungen hinzukommen beziehungsweise ursprünglich gültige Lösung verschwinden können. Zum anderen ist zu beachten, dass das Relationszeichen umgedreht werden muss, wenn $T < 0$ ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned} T_1 < T_2 \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 \cdot T < T_2 \cdot T \qquad (T > 0) \\ T_1 < T_2 \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 : T < T_2 : T \qquad (T > 0) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} T_1 < T_2 \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 \,\cdot\, T > T_2 \,\cdot\, T \qquad (T < 0) \\ T_1 < T_2 \quad &\Leftrightarrow \quad T_1 \,:\, T > T_2 \,:\, T \qquad (T < 0) \end{aligned}$$

Werden neben den vier grundlegenden Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) weitere Rechenoperationen (beispielsweise Potenzieren, Wurzelziehen oder Logarithmieren) angewendet, so sind wiederum zusätzliche Überlegungen nötig.

Lineare Ungleichungen

Eine Ungleichung heißt linear, wenn sie in folgender allgemeiner Form dargestellt werden kann:

$$a \cdot x + b < 0 \tag{61}$$

Die Lösung einer linearen Ungleichung ist $x < -\frac{b}{a}$, falls $a > 0$ ist. Wenn andernfalls $a < 0$ gilt, so ist die Lösung $x > -\frac{b}{a}$.
(Die Division durch eine negative Zahl dreht das Ungleichungszeichen um.)

Beispiel:

- Für welche x-Werte gilt die folgende Ungleichung?

  $$3 \cdot x - 4 < -5 \cdot x + 9$$

  Zunächst wird die Gleichung in die allgemeine Form $a \cdot x + b < 0$ gebracht:

  $$8 \cdot x - 13 < 0$$

  Da in diesem Fall der Koeffizient $a = 8$ positiv ist, folgt mit $b = -13$ für die Lösung $x < -\frac{b}{a}$:

  $$x < \frac{13}{8}$$

  Die Ungleichung ist somit für alle x-Werte kleiner als $\frac{13}{8} = 1,625$ erfüllt.

Löst man eine lineare Ungleichung mit Papier und Bleistift, so kann es einfacher sein, alle x-Terme auf die eine Seite und alle anderen Terme auf die andere Seite zu sortieren und anschließend die Ungleichung durch den Koeffizienten des x-Terms zu teilen. Dies funktioniert jedoch einerseits nur bei linearen Ungleichungen, andererseits verlangen auch Computer-Algebra-Systeme wie Sympy teilweise explizit die in Gleichung (61) angegebene Darstellung.

Quadratische Ungleichungen

Eine Ungleichung heißt quadratisch, wenn sie in folgender allgemeiner Form dargestellt werden kann:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0 \tag{62}$$

Um eine quadratische Ungleichung zu lösen, zerlegt man den Term auf der linken Seite, sofern möglich, in ein Produkt aus zwei Linearfaktoren. Dieses Produkt kann nur dann negativ sein, wenn beide Faktoren unterschiedliche Vorzeichen haben. Mittels zweier Fallunterscheidung wird also geprüft, für welche x-Werte jeweils ein Linearfaktor positiv und der andere negativ ist; die Lösung der quadratischen Ungleichung ist dann die Vereinigungsmenge beider Teillösungen.

Lässt sich der Term auf der linken Seite nicht in Linearfaktoren zerlegen, so ist die Ungleichung entweder für alle x-Werte wahr oder für alle x-Werte falsch. Welcher Fall zutrifft, lässt sich durch ein probeweises Einsetzen eines beliebigen x-Wertes leicht ermitteln.

Betragsungleichungen

Ungleichungen, die einen in Betragszeichen stehenden Term T enthalten, erfordern eine Fallunterscheidung hinsichtlich dieses Terms:

- Für alle x-Werte, die als Bedingung $T \geq 0$ erfüllen, können die Betragsstriche durch runde Klammern ersetzt werden.
- Für alle x-Werte, die $T < 0$ zur Folge haben, werden die Betragsstriche durch runde Klammern ersetzt und mit (-1) multipliziert.

Nach dieser Fallunterscheidung wird die verbleibende Ungleichung gelöst. In beiden Fällen ist die Teil-Lösungsmenge gleich der Schnittmenge aus der Menge an x-Werten, für die $T \geq 0$ beziehungsweise $T < 0$ ergibt, und der jeweiligen Lösung der resultierenden Ungleichung. Die Gesamt-Lösungsmenge ist schließlich gleich der Vereinigungsmenge beider Teil-Lösungsmengen.

Bruchungleichungen

Jede Bruchungleichung kann in eine der zwei folgenden Formen gebracht werden:

$$\frac{a}{b} > 0 \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} < 0 \tag{63}$$

Im ersten Fall ist nur dann eine Lösung möglich, wenn a und b beide positiv oder beide negativ sind. Im zweiten Fall muss entweder a negativ und b positiv sein, oder umgekehrt a positiv und b negativ. Führen die sich ergebenden Fallunterscheidungen zu keinem Ergebnis, so ist die Ungleichung nicht lösbar.

Beispiel:

- Für welche x-Werte gilt die folgende Ungleichung?

$$\frac{x-2}{x+3} < 6$$

Zunächst wird die Gleichung in die allgemeine Form (63) gebracht:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x+3} - 6 &< 0 \\ \frac{x-2}{x+3} - \frac{6 \cdot (x+3)}{x+3} &< 0 \\ \frac{x-2-6 \cdot x - 18}{x+3} &< 0 \\ \frac{-5 \cdot x - 20}{x+3} &< 0\end{aligned}$$

Die erste Möglichkeit, dass die Ungleichung erfüllt wird, besteht darin, dass der Zähler positiv und der Nenner negativ ist. Dabei muss gelten:

$$\begin{aligned}-5 \cdot x - 20 > 0 \quad &\text{und} \quad x + 3 < 0 \\ -5 \cdot x > 20 \quad &\text{und} \quad x < -3 \\ x < -4 \quad &\text{und} \quad x < -3\end{aligned}$$

Die erste Teillösung lautet somit $x < -4$, da nur diese x-Werte beide Bedingungen gleichzeitig erfüllen.

Die zweite Möglichkeit, dass die Ungleichung erfüllt wird, besteht darin, dass der Zähler negativ und der Nenner positiv ist. Dabei muss gelten:

$$\begin{aligned}-5 \cdot x - 20 < 0 \quad &\text{und} \quad x + 3 > 0 \\ -5 \cdot x < 20 \quad &\text{und} \quad x > -3 \\ x > -4 \quad &\text{und} \quad x > -3\end{aligned}$$

Die zweite Teillösung lautet somit $x > -3$, da nur diese x-Werte beide Bedingungen gleichzeitig erfüllen.

Die Gesamt-Lösung ist gleich der Vereinigungsmenge beider Teillösungen, also $]-\infty\,; -4[\ \cup\ ]-3\,; +\infty[$.

Ebenso wäre es möglich, die ursprüngliche Gleichung $\frac{a}{b} < c$ mit dem Nenner des Bruchterms zu multiplizieren; hierbei muss jedoch ebenso mittels einer Fallunterscheidung geprüft werden, für welche x-Werte der Nenner positiv beziehungsweise negativ ist; anschließend muss die sich ergebende Ungleichung mittels weiterer Fallunterscheidungen gelöst werden. Der insgesamte Rechenaufwand wird durch dieses Verfahren also meist nicht verringert.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Lineare Gleichungssysteme

Oftmals werden bei mathematischen Aufgaben nicht einzelne Gleichungen, sondern vielmehr Kombinationen von mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten betrachtet. Damit ein solches Gleichungssystem eindeutig gelöst werden kann, müssen (mindestens) ebenso viele Gleichungen vorliegen wie Unbekannte vorhanden sind.

Sind die einzelnen Gleichungen eines Gleichungssystems linear, treten die Variablen x_{i} also nur erster Potenz auf, so spricht man von einem linearen Gleichungssystem.

Im einfachsten Fall besteht ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Bezeichnet man diese Variablen mit x_1 und x_2, so kann man das Gleichungssystem allgemein in folgender Form darstellen:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$$
$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

Die so genannten Koeffizienten a_{11} bis a_{22} sind reelle Zahlen. Die erste Ziffer ihrer Indizes gibt jeweils die Zeilennummer, die zweite Ziffer die Spaltennummer an. b_1 und b_2 sind ebenfalls (reelle) Konstanten. Lösungen des Gleichungssystems sind alle Zahlenpaare $(x_1\,,\,x_2)$, die sowohl die erste als auch die zweite Gleichung erfüllen.

Eine einzelne Gleichung mit zwei voneinander unabhängigen Variablen lässt sich niemals eindeutig lösen. Die Werte der einen Variablen lassen sich lediglich in Abhängigkeit von der anderen Variablen angeben, wobei im Allgemeinen unendlich viele Zahlenpaare als Lösungen existieren. Auf derartige (funktionale) Zusammenhänge wird im Rahmen der Analysis näher eingegangen.

Grundlegende Lösungsverfahren

Ein lineares Gleichungssystem der obigen Form lässt sich mit verschiedenen Methoden lösen, die sich hinsichtlich ihres Rechenaufwands erheblich voneinander unterscheiden. Um dies zu demonstrieren, werden die drei grundlegenden Verfahren im folgenden Abschnitt anhand des jeweils gleichen Beispiels vorgestellt. Dabei werden die Gleichungen zur besseren Übersichtlichkeit – wie allgemein üblich – mit römischen Ziffern durchnummeriert.

Einsetzungsverfahren:

Eine Gleichung kann nach einer Variablen, beispielsweise x_1, aufgelöst werden, und der sich ergebende Term an Stelle der entsprechenden Variablen in die andere Gleichung eingesetzt werden. Obwohl dies einfach klingt, bringt diese Methode den größten Rechenaufwand mit sich.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\text{(I)}: &\qquad -2 \cdot x_1 + \;\; 4 \cdot x_2 = -2 \\
\text{(II)}: &\qquad +3 \cdot x_1 + \;\; 5 \cdot x_2 = +36
\end{aligned}$$

Löst man beispielsweise die Gleichung (I) nach x_1 auf, so folgt:

$$\begin{aligned}
\text{(I)}: &\qquad -2 \cdot x_1 = -4 \cdot x_2 - 2 \\
\Rightarrow &\qquad x_1 = +2 \cdot x_2 + 1
\end{aligned}$$

Setzt man den resultierenden Ausdruck für x_1 in Gleichung (II) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}(x_1) \text{ in (II)} : \qquad 3 \cdot (2 \cdot x_2 + 1) + \;\; 5 \cdot x_2 &= +36 \\ 6 \cdot x_2 + 3 \;\; + \;\; 5 \cdot x_2 &= +36 \\ +11 \cdot x_2 &= +33 \\ \underline{\underline{x_2 = +3}}\end{aligned}$$

Setzt man das Ergebnis $x_2 = 3$ in Gleichung (I) ein, so folgt schließlich:

$$\begin{aligned}(x_2 = 3) \text{ in (I)} : \qquad -2 \cdot x_1 + 4 \cdot (3) &= -2 \\ -2 \cdot x_1 &= -14 \\ \underline{\underline{x_1 = +7}}\end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist somit $(x_1\,,\,x_2) = (7\,,\,3)$.

Das Einsetzungsverfahren ist, wie man sich leicht vorstellen kann, für komplexere Gleichungssyteme nicht ohne erheblichen Rechenaufwand anwendbar.

Gleichsetzungsverfahren:

Löst man beide Gleichungen nach einer Variablen, beispielsweise x_1, auf, so können die jeweils resultierenden Terme gleichgesetzt werden. Man erhält somit eine einzelne lineare Gleichung mit nur einer Unbekannten.

Beispiel:

$$\begin{aligned}(\text{I}) : \qquad -\;2 \cdot x_1 + \;\; 4 \cdot x_2 &= -2 \\ \Rightarrow \qquad x_1 &= +2 \cdot x_2 + 1 \\[1ex] (\text{II}) : \qquad +\;3 \cdot x_1 + \;\; 5 \cdot x_2 &= +36 \\ \Rightarrow \qquad x_1 &= -\frac{5}{3} \cdot x_2 + 12\end{aligned}$$

Setzt man die beiden Terme für x_1 gleich, so ergibt sich folgende Gleichung, die gemäß der für lineare Gleichungen üblichen Methode nach x_2 aufgelöst werden kann:

$$\begin{aligned}(\text{I}) = (\text{II}) : \qquad 2 \cdot x_2 + 1 &= -\frac{5}{3} \cdot x_2 + 12 \\ \frac{11}{3} \cdot x_2 &= +11 \\ \underline{\underline{x_2 = +3}}\end{aligned}$$

Setzt man das Ergebnis $x_2 = 3$ wiederum in Gleichung (I) ein, so erhält man wie im ersten Beispiel $x_1 = 7$ und damit als Lösung $(x_1\,,\,x_2) = (7\,,\,3)$.

Auch die Gleichsetzungsmethode ist offensichtlich mit einigem Rechenaufwand verbunden und wird daher in der Praxis nur in seltenen Fällen angewendet.

- Das Additionsverfahren:

Werden zwei Gleichungen mit jeweils passenden Faktoren $c_1, c_2 \neq 0$ multipliziert, so kann erreicht werden, dass die Koeffizienten einer Variablen, beispielsweise x_1, einen betraglich gleichen Wert mit unterschiedlichem Vorzeichen annehmen.

Anschließend geht man von der Annahme aus, dass ein Zahlenpaar $(x_1\,,\,x_2)$ als Lösung des Gleichungssystems existiert. Dadurch kann beispielsweise die erste Gleichung zur zweiten addiert werden, da (wenn $(x_1\,,\,x_2)$ die Gleichung erfüllt) auf beiden Seiten das Gleiche addiert wird.

Beispiel:

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}): \qquad & -\;2\cdot x_1 + \;\;4\cdot x_2 = -2 \\ (\mathrm{II}): \qquad & +\;3\cdot x_1 + \;\;5\cdot x_2 = +36 \end{aligned}$$

Wird die erste Gleichung mit 4 und die zweite Gleichung mit -5 multipliziert, so nehmen die bei x_1 stehenden Koeffizienten gleiche Werte mit unterschiedlichen Vorzeichen an.

$$\begin{aligned} 3\cdot\;(\mathrm{I}): \qquad & -\;6\cdot x_1 + 12\cdot x_2 = -6 \\ 2\cdot(\mathrm{II}): \qquad & +\;6\cdot x_1 + 10\cdot x_2 = +72 \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass ein Zahlenpaar $(x_1\,,\,x_2)$ als Lösung existiert, kann die erste Gleichung nun zur zweiten addiert werden. Hierbei entfällt die Variable x_1, und wieder ergibt sich eine einzige Gleichung mit nur einer Unbekannten:

$$\begin{aligned} 3\cdot(\mathrm{I}) + 2\cdot(\mathrm{II}): \qquad & 22\cdot x_2 = +66 \\ & \underline{\underline{x_2 = +3}} \end{aligned}$$

Setzt man das Ergebnis $x_2 = 3$ wiederum in Gleichung (I) ein, so erhält man wie im ersten Beispiel $x_1 = 7$ und damit als Lösung $(x_1\,,\,x_2) = (7\,,\,3)$.

Das Additionsverfahren ist im Allgemeinen mit dem geringsten Rechenaufwand verbunden und wird daher bevorzugt als grundlegende Lösungsmethode angewendet.

Die wesentliche Annahme des Additionsverfahrens, dass das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt, trifft nicht für alle Gleichungsssysteme zu. Es kann dennoch auch dann angewendet werden, wobei im Allgemeinen die folgenden Fälle auftreten können

- Führt das Additionsverfahren auf eine Gleichung der Art $1 = 1$, so entsprechen die beiden miteinander addierten Gleichungen einer einzigen Gleichung und einem Vielfachen dieser Gleichung. Somit liegt letztlich eine einzige Gleichung mit zwei Unbekannten vor, die im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar ist, sondern unendlich viele Zahlenpaare $(x_1,\, x_2)$ als Lösung besitzt.
- Führt das Additionsverfahren auf eine Gleichung der Art $0 = 1$, also einen Widerspruch, so existiert keine Lösung für das Gleichungssystem. (Dies ist vergleichbar damit, dass es beispielsweise kein x gibt, für das zugleich $x = 5$ und $x = 7$ gilt.)

Das Additionsverfahren ist im Vergleich zum Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren meist mit erheblich weniger Rechenaufwand verbunden; es stellt zugleich die Grundlage für den bei komplexeren Gleichungssystemen genutzten Gauss'schen Lösungsalgorithmus dar.

Der Gauss'sche Lösungsalgorithmus

Besteht ein Gleichungssystem aus mehr als zwei Gleichungen (mit mehr als zwei Unbekannten), so wird üblicherweise der nach Carl Friedrich Gauss benannte Algorithmus angewendet. Dieses Verfahren soll zunächst am Beispiel eines Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten demonstriert werden.

Ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten hat allgemein folgende Form:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 &= b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Um ein derartiges Gleichungssystem zu lösen, ist es hilfreich, dieses schrittweise in eine treppenartige Form zu bringen. Hierzu geht man nach folgendem Schema vor:

- Als erstes wird eine der Gleichungen ausgewählt ("Ausgangsgleichung").
- Mittels des Additionsverfahrens wird paarweise die Ausgangsgleichung und eine der beiden anderen Gleichungen mit passenden Faktoren multipliziert, um zu erreichen, dass die Koeffizienten der ersten Variablen jeweils betraglich gleiche Werte mit unterschiedlichen Vorzeichen annehmen.
- Die Ausgangsgleichung und je eine weitere Gleichung werden paarweise addiert, um ein Wegfallen der ersten Variablen zu erreichen.
- Das Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten ist so auf ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten reduziert worden.[1] Die obigen Verfahrensschritte können auf dieses erneut angewendet werden.

Der Gauss'sche Algorithmus führt somit Gleichungssysteme mit vielen Gleichungen beziehungsweise Unbekannten schrittweise auf Gleichungssysteme mit weniger Gleichungen und Unbekannten zurück, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig ist. Diese Gleichung kann einfach gelöst werden, und durch Einsetzen der Lösung in die Ausgangsgleichung(en) können wiederum schrittweise auch die Lösungen aller anderen Unbekannten mühelos berechnet werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{(I)}: \quad & 8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = +15 \\ \text{(II)}: \quad & 6 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 = -13 \\ \text{(III)}: \quad & -4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = +21 \end{aligned}$$

Wählt man in diesem Beispiel Gleichung (I) als Ausgangsgleichung und multipliziert sie mit drei, so kann man Gleichung (II) passenderweise mit Minus vier multiplizieren, um bei beiden Gleichungen identische Koeffizienten mit unterschiedlichem Vorzeichen für x_1 zu erreichen. In gleicher Weise kann man Gleichung (I) unverändert lassen und Gleichung (III) mit zwei multiplizieren,

[1] Allgemein kann auf diese Weise ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten auf ein Gleichungssystem mit $(n-1)$ Gleichungen und $(n-1)$ Unbekannten reduziert werden.

um auch bei diesem Gleichungspaar identische Koeffizienten mit unterschiedlichem Vorzeichen für x_1 zu erreichen:

$$\begin{aligned} 3\cdot\ \ (\mathrm{I}): &\quad 24\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 9\cdot x_3 = +45 \\ -4\cdot\ (\mathrm{II}): &\quad -24\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - 28\cdot x_3 = +52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1\cdot\ \ (\mathrm{I}): &\quad 8\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = +15 \\ 2\cdot (\mathrm{III}): &\quad -8\cdot x_1 + 10\cdot x_2 - 6\cdot x_3 = +42 \end{aligned}$$

Wird jeweils die Ausgangsgleichung zu den beiden anderen Gleichungen addiert, so erhält man ein neues Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten. Diese werden mit römischen Ziffern gemäß ihrer beiden ursprünglichen Gleichungen nummeriert und als Zeichen dafür, dass es sich um hergeleitete Gleichungen handelt, mit einem Hochkomma markiert:

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ (\mathrm{II}'): &\quad +10\cdot x_2 - 19\cdot x_3 = +97 \\ (\mathrm{III}'): &\quad +12\cdot x_2 - 3\cdot x_3 = +57 \end{aligned}$$

Um das Additionsverfahren erneut anwenden zu können, müssen wiederum beide Gleichungen mit geeigneten Faktoren multipliziert werden, um betraglich gleiche Koeffizienten mit unterschiedlichen Vorzeichen für x_2 zu erreichen. Dazu kann die neue Ausgangsgleichung (II') mit Minus sechs und die zweite Gleichung mit fünf multipliziert werden:

$$\begin{aligned} -6\cdot\ (\mathrm{II}'): &\quad -60\cdot x_2 + 114\cdot x_3 = -582 \\ 5\cdot (\mathrm{III}'): &\quad +60\cdot x_2 - 15\cdot x_3 = +285 \end{aligned}$$

Eine Addition beider Gleichungen führt schließlich auf eine einzige Gleichung, die nur noch die Variable x_3 beinhaltet.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ (\mathrm{III}''): &\quad +99\cdot x_3 = -297 \\ &\quad \underline{\underline{x_3 = -3}} \end{aligned}$$

Somit ist eine eindeutige Lösung für die Variable x_3 gefunden. Um die Lösungen für die Variablen x_1 und x_2 zu berechnen, setzt man die gefundene Lösung zunächst in die vorherige Ausgangsgleichung (II') ein. Damit kann x_2 einfach bestimmt werden:

$$\begin{aligned} (x_3 = -3) \text{ in } (\mathrm{II}'): &\quad +10\cdot x_2 - 19\cdot(-3) = +97 \\ &\quad 40\cdot x_2 = +40 \\ &\quad \underline{\underline{x_2 = +4}} \end{aligned}$$

Setzt man die Lösungen $x_3 = -3$ und $x_2 = 4$ schließlich in die erste Ausgangsgleichung (I) ein, so erhält man auch die Lösung für die letzte Variable x_1:

$$\begin{aligned} \left.\begin{matrix}(x_2 = +4)\\(x_3 = -3)\end{matrix}\right\} \text{ in } (\mathrm{I}): &\quad 8\cdot x_1 + 2\cdot(+4) + 3\cdot(-3) = +15 \\ &\quad 8\cdot x_1 = +16 \\ &\quad \underline{\underline{x_1 = +2}} \end{aligned}$$

Damit sind alle Variablen bestimmt. Die Lösung des Gleichungssystems ist $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) = (2\,,\,4\,,\,-3)$.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Elementare Geometrie

Die elementare Geometrie beschäftigt sich mit zwei- und dreidimensionalen Grundformen und ihren Eigenschaften. Erstere werden in der Planimetrie, letztere in der Stereometrie untersucht. Eine Weiterführung der elementaren Geometrie mit Rechenmethoden der *Algebra* und *Analysis* stellt die in einem späteren Kapitel behandelte *analytische Geometrie* dar.

Grundbegriffe

Einige geometrische Gebilde treten in der Geometrie besonders häufig und in verschiedenen Zusammenhängen auf. Die wichtigsten dieser Grundelemente und damit zusammenhängende Begriffe werden im folgenden Abschnitt zusammenfassend vorgestellt.

Punkt, Gerade, Strecke und Strahl

Punkt und Dimension

Das vielleicht grundlegendste Objekt der Geometrie ist der Punkt. Ein Punkt ist dimensionslos, besitzt also keine räumliche Ausdehnung. Die Lage eines Punktes im Raum wird für gewöhnlich durch Koordinaten angegeben, beispielsweise $\mathrm{P}(x\,,\,y)$ für einen Punkt im zweidimensionalen Raum oder $\mathrm{P}(x\,,\,y\,,\,z)$ für einen Punkt im dreidimensionalen Raum. Die Dimension eines Objekts gibt an, wieviele Raumrichtungen zur Beschreibung seiner geometrischen Eigenschaften berücksichtigt werden müssen.

Geraden und Halbgeraden

Eine Gerade g entspricht anschaulich einer Bahn, die sich ergibt, wenn sich ein Punkt ohne Änderung der Richtung unbegrenzt hin- und herbewegt. Eine Gerade weist stets eine eindeutige Richtung im Raum auf, hat jedoch im Allgemeinen keinen "Richtungssinn", sie besitzt also keinen klar definierten Anfang als Startpunkt und kein klar definiertes Ende als Zielpunkt.[1] Vielmehr besteht jede Gerade aus einer Menge von unendlich vielen Punkten, die sich auf der geradlinigen Bahn befinden.

[1] Wird einer Geraden willkürlich ein Richtungssinn zugewiesen, so spricht man von einer "orientierten" Geraden.

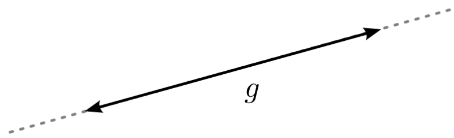


Abb. 25: Richtung und Richtungssinn einer Gerade.

Die Richtung einer Geraden wird bereits durch die Angabe zweier auf ihr liegender Punkte eindeutig festgelegt. Da jede Gerade stets nur entlang einer Raumrichtung verläuft, ist ihre Dimension gleich eins.

Betrachtet man einen Punkt P, der auf einer Geraden liegt, so wird diese durch den Punkt in zwei Halbgeraden unterteilt. Liegt ein weiterer Punkt A auf der einen, ein Punkt B auf der anderen Halbgeraden, so schreibt man für beide Halbgeraden auch kurz [PA bzw. [PB.

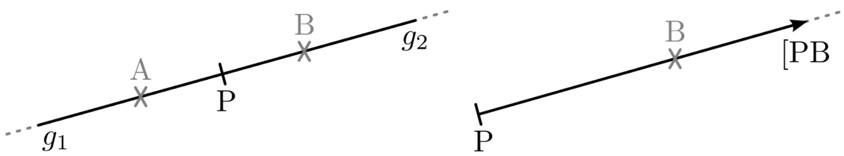


Abb. 26: Darstellung einer Halbgeraden und eines Strahls.

Als Strahl bezeichnet man eine Halbgerade, der ein eindeutiger Richtungssinn zugewiesen wird.

Eine Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ entspricht der Menge aller Punkte, die sich zwischen zwei auf Punkten A und B einer Geraden befinden; diese werden ebenfalls zur Punktmenge hinzugenommen. Eine Strecke entspricht stets dem kürzesten Abstand zwischen beiden Endpunkten.

Als Pfeil (oder Vektor) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ bezeichnet man eine Strecke zwischen zwei Punkten A und B, die einen eindeutigen Richtungssinn aufweist.

Abb. 27: Darstellung einer Strecke und eines Vektors.

Auf die Darstellung von Strecken, Vektoren und Geraden mittels Koordinaten wird im Rahmen der analytischen Geometrie näher eingegangen.

Parallelität und Winkel

Verlaufen zwei voneinander verschiedene Geraden g_1 und g_2 entlang der gleichen Richtung, so heißen sie zueinander parallel.[2] Beide Geraden haben an jeder Stelle den gleichen Abstand $a \neq 0$ voneinander und somit keinen gemeinsamen Punkt ("Schnittpunkt").

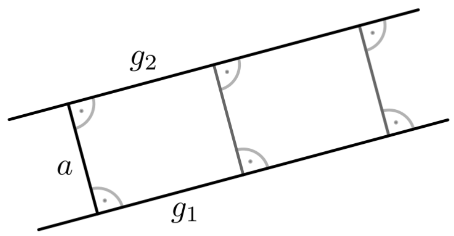


Abb. 28: Abstand a zweier paralleler Geraden g_1 und g_2.

Der Abstand eines Punktes zu einer Geraden wird stets senkrecht zu dieser Geraden gemessen; dies entspricht der kürzest möglichen Strecke zwischen diesem Punkt und einem Punkt auf der Geraden. Der Abstand zweier paralleler Geraden entspricht dem Abstand irgendeines Punktes der einen Geraden zur anderen Geraden.

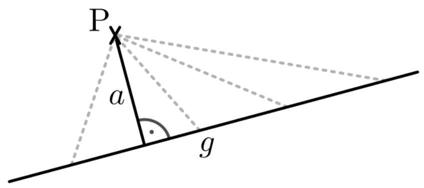


Abb. 29: Abstand a zwischen einem Punkt P und einer Geraden.

Winkel und Gradmaß

Gehen zwei Strahlen von einem gemeinsamen Punkt S ("Scheitel") aus, so bezeichnet man den Richtungsunterschied zwischen beiden Strahlen als Winkel. Üblicherweise werden Winkel mit griechischen Kleinbuchstaben symbolisiert; beschreibt der Winkel eine Drehung des Strahls gegen den Uhrzeigersinn, so wird er positiv genannt, andernfalls negativ. Liegen auf den zwei Strahlen (auch "Winkelschenkel" genannt) die Punkte A und B, so schreibt man auch $\alpha = \sphericalangle \text{ASB}$.

Die Größe eines Winkels wird üblicherweise in Grad angegeben. Ein Grad entspricht dabei einem 360-tel einer vollen Umdrehung; wird also ein Strahl um einen Winkel von 360° gedreht, so ist er deckungsgleich mit dem ursprünglichen Strahl. Je nach Winkelgröße unterscheidet man folgende Winkelarten:

[2] Sind zwei orientierte Geraden g_1 und g_2 zueinander parallel, so können sie "gleichsinnig parallel" (Symbol: $g_1 \uparrow\uparrow g_2$) oder "antiparallel" (Symbol: $g_1 \uparrow\downarrow g_2$) zueinander verlaufen.

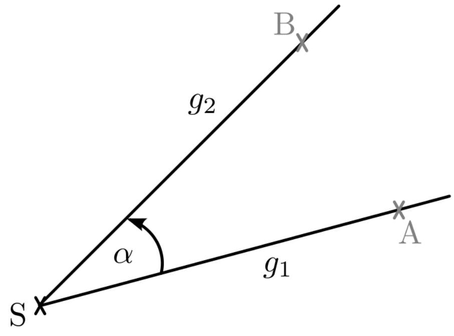


Abb. 30: Winkel zwischen zwei Strahlen.

- Gilt $0 < \alpha < 90°$, so nennt man den Winkel “spitz”.
- Gilt $90 < \alpha < 180°$, so nennt man den Winkel “stumpf”.
- Gilt $180 < \alpha < 360°$, so nennt man den Winkel “überstumpf”.

Gilt für einen Winkel $\alpha = 90°$, so wird er als “rechter Winkel” bezeichnet, bei $\alpha = 180°$ wird ein Winkel “gestreckter Winkel” genannt. Im Fall $\alpha = 360°$, also einer vollen Umdrehung, bezeichnet man den Winkel auch als “Vollwinkel”.

Für die Angabe von sehr kleinen Winkelgrößen sind auch die Einheiten “Winkelminute” und “Winkelsekunde” gebräuchlich. Ein Grad entspricht 60 Winkelminuten, eine Winkelminute wiederum 60 Winkelsekunden. Dabei ist folgende Schreibweise üblich:

$$1° = 60'$$
$$1' = 60''$$

Das Bogenmaß, das ebenfalls häufig für Winkelangaben Verwendung findet, wird im Abschnitt *Gradmaß und Bogenmaß* näher beschrieben.

Scheitelwinkel und Nebenwinkel

Schneiden sich zwei Geraden, so ergänzen sich zwei nebeneinander liegende Winkel jeweils zu 180. Für je zwei so genannte “Nebenwinkel” α und β gilt also:

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 180°$$
$$\alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 = 180°$$

Die einander gegenüberliegenden Winkel zweier sich schneidender Geraden heißen “Scheitelwinkel”. Scheitelwinkel sind paarweise stets gleich groß, es gilt also immer:

$$\alpha_1 = \alpha_2$$
$$\beta_1 = \beta_2$$

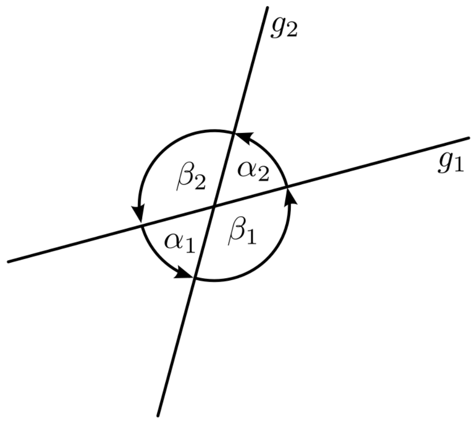


Abb. 31: Scheitelwinkel und Nebenwinkel zweier sich schneidender Geraden g_1 und g_2.

Stufenwinkel und Wechselwinkel

Zeichnet man zu einer von zwei sich schneidenden Geraden eine parallel Gerade, so liegen am zweiten Schnittpunkt identische Winkelverhältnisse vor wie am ersten. Die Winkel, die auf der gleichen Seite der die beiden Parallelen schneidenden Geraden liegen, heißen "Stufenwinkel" (oder kurz: "F"-Winkel), die einander gegenüber liegenden Winkel "Wechselwinkel" (oder kurz: "Z"-Winkel).

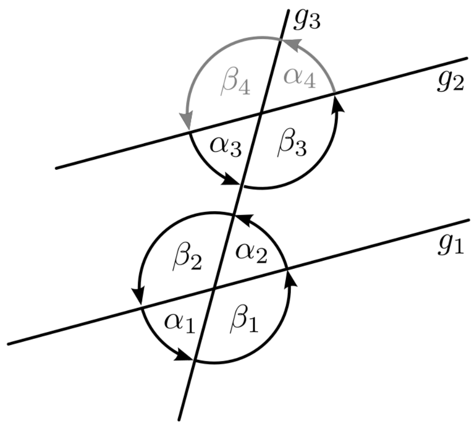


Abb. 32: Stufenwinkel und Wechselwinkel zweier paralleler Geraden g_1 und g_2, die von einer weiteren Geraden g_3 geschnitten werden.

In der Abbildung *Stufenwinkel und Wechselwinkel* sind beispielsweise β_1 und β_3 als Stufenwinkel gleich groß, es gilt also $\beta_1 = \beta_3$. Ebenso gilt $\alpha_2 = \alpha_3$, da es sich bei diesen beiden Winkeln um Wechselwinkel handelt.[3]

[3] Genau genommen gilt sogar $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ sowie $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$, da es sich jeweils paarweise um Stufen- bzw. Wechselwinkel handelt.

Zueinander senkrechte Winkel

Stehen die Strahlen zweier Winkel senkrecht aufeinander, so sind die beiden Winkel gleich groß. Der Grund dafür ist, dass die beiden aneinander liegenden β-Winkel Scheitelwinkel darstellen, also gleich groß sind. Da die Summe der Winkel in einem Dreieck stets 180° beträgt und in beiden Dreiecken je ein Winkel gleich 90° ist, folgt aus der Gleichheit von β auch die Gleichheit von α.

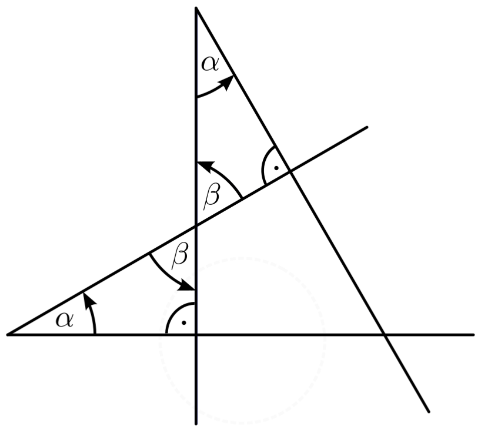


Abb. 33: Gleichheit von zueinander senkrecht stehenden Winkeln.

Eine naturwissenschaftliche Anwendung dieses Zusammenhangs stellt beispielsweise das Kraftverhältnis an einer schiefen Ebene dar.

Planimetrie

Die Planimetrie ist das geometrische Teilgebiet, in dem Eigenschaften zweidimensionaler Grundformen untersucht werden.

Grundkonstruktionen

Auch wenn heutzutage ausgereifte Geometrie- und Zeichenprogramme wie Geogebra oder Inkscape frei verfügbar und weit verbreitet sind, so sind im praktischen Einsatz oftmals auch einfache Zeichentechniken nützlich, die sich mit Zirkel und Lineal beziehungsweise Geodreieck umsetzen lassen. Solche Grundkonstruktionen sind:

- Eine Strecke halbieren:

  Zunächst zeichnet man von beiden Endpunkten A und B der Strecke aus je einen Kreis mit Radius $r > \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{AB}|$. Beide Kreise schneiden sich in zwei Punkten S_1 und S_2. Die Verbindungslinie dieser beiden Schnittpunkte halbiert die Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$.

- Eine Senkrechte zu einer Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ errichten, die durch einen bestimmten Punkt P auf der Strecke verläuft:

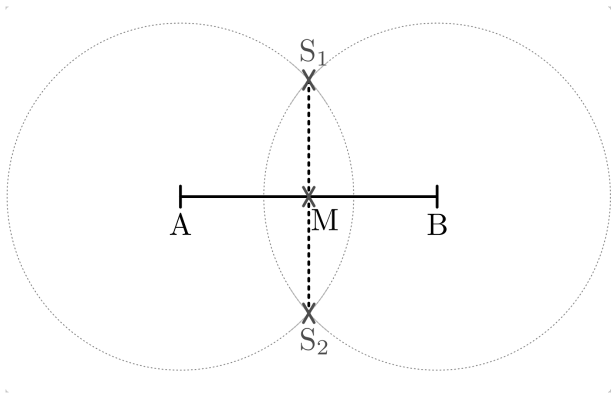


Abb. 34: Halbierung einer Strecke durch geometrische Konstruktion.

Zunächst zeichnet man um den Punkt P einen Kreis mit beliebigem Radius r_1. Anschließend zeichnet man um die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 zwei weitere Kreise, jeweils mit Radius $r_2 > r_1$. Die Strecke vom Punkt P zu einem der beiden sich ergebenden Schnittpunkte S_3 und S_4 entspricht der gesuchten Senkrechten.

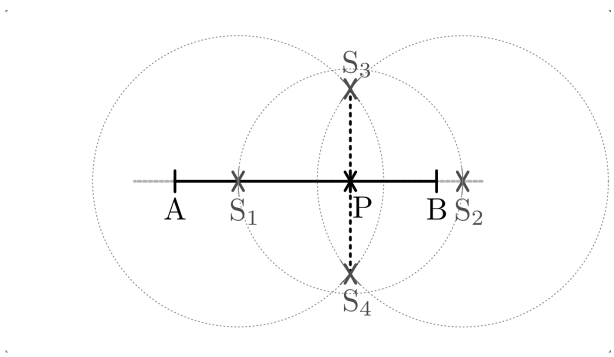


Abb. 35: Konstruktion einer Senkrechten zu einer Strecke durch einen bestimmten Punkt auf der Strecke.

- Eine Senkrechte zu einer Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ errichten, die durch einen externen Punkt P verläuft:

  Zunächst zeichnet man um den Punkt P einen Kreis mit Radius r_1, so dass dieser die Strecke in den Punkten S_1 und S_2 schneidet. Anschliessend zeichnet man um die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 zwei weitere Kreise, jeweils mit Radius $r_2 > r_1$. Die Strecke vom Punkt P zu einem der beiden sich ergebenden Schnittpunkte, vorzugsweise zum gegenüber liegenden Punkt S_3, entspricht der gesuchten Senkrechten.

- Eine Parallele zu einer Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ errichten, die durch einen externen Punkt P geht:

  Zunächst zeichnet man eine vom Punkt P ausgehende Halbgerade, welche die Strecke in einem (beliebigen) Punkt S_1 schneidet. Anschließend zeichnet man um S_1 einen Kreis mit Radius $|PS_1|$. Zeichne anschließend vom Schnittpunkt S_2 dieses Kreises mit der Halbgeraden eine weitere Halbgerade durch einen anderen (beliebigen) Punkt S_3 auf der Strecke. Ein Kreis um S_3 mit dem Radius $|S_2S_3|$ liefert den Schnittpunkt S_4. Die Gerade entlang $\overline{\mathrm{PS_4}}$ entspricht schließlich der gesuchten Parallele.

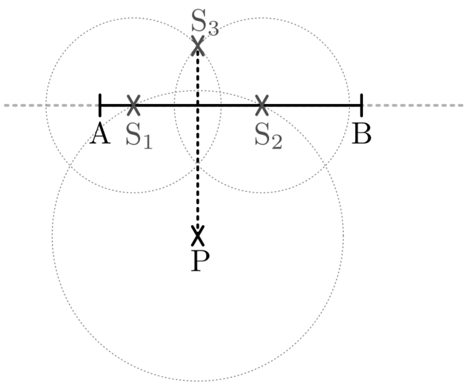


Abb. 36: Konstruktion einer Senkrechten zu einer Strecke durch einen bestimmten Punkt außerhalb der Strecke.

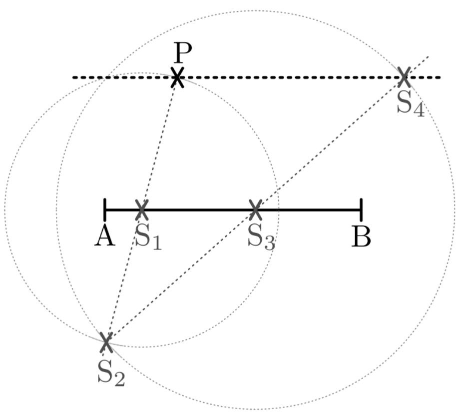


Abb. 37: Konstruktion einer Parallelen zu einer Strecke.

Hat man nicht nur einen Zirkel und ein Lineal, sondern zusätzlich ein Konstruktions-Dreieck, so kann man auch dieses nutzen, um eine parallele Gerade zu konstruieren: Man legt zunächst das Dreieck mit einer Seite entlang der Geraden an; anschließend legt man das Lineal entlang einer der beiden anderen Dreieckseiten an. Verschiebt man nun das Dreieck längs des Lineals, so kann man entlang der Dreieckseite, die entlang der ursprünglichen Gerade verlief, unmittelbar eine parallel verlaufende Strecke zeichnen.

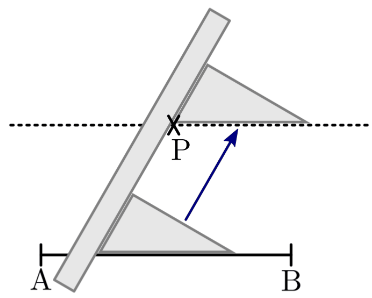


Abb. 38: Konstruktion einer Parallelen mittels Lineal und Dreieck.

- Einen Winkel halbieren:

  Zunächst zeichnet man um den Scheitelpunkt des Winkels einen Kreis mit beliebigem Radius, der die Winkelschenkel in den Punkten S_1 und S_2 schneidet. Um diese zeichnet man anschließend zwei weitere Kreise mit gleichem Radius. Der Schnittpunkt S_3 dieser beiden Kreise liefert, verbunden mit dem Scheitelpunkt des Winkels, die gesuchte Winkelhalbierende.

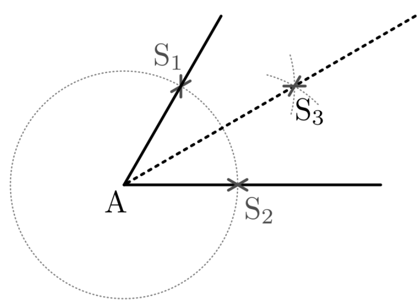


Abb. 39: Konstruktion einer Winkelhalbierenden.

Abbildungen innerhalb einer Ebene

Durch eine geometrische Abbildung entsteht aus einer Original-Figur eine neue Figur innerhalb der gleichen Ebene (beziehungsweise innerhalb des gleichen Raumes im dreidimensionalen Fall). Fasst man eine geometrische Form als Menge ihrer Punkte auf, so ist eine geometrische Abbildung formal mit einer *Abbildung von Mengen* identisch.

Ähnlichkeitsabbildungen

Bei einer Ähnlichkeitsabbildung bleibt die Form einer geometrischen Figur erhalten, ihre Größe ändert sich jedoch. Grundlegend ist hierbei die so genannte "zentrische Streckung". Um eine zentrische Streckung zu beschreiben, geht man von einem bestimmten Punkt Z als Streckungszentrum aus. Zeichnet man von Z aus durch jeden Punkt P einer geometrischen Figur F einen Strahl und zeichnet auf diesem in der jeweils λ-fachen Entfernung einen neuen Punkt P′ ein, so erhält man eine zweite Figur F', die gegenüber der Original-Figur verschoben und λ-mal so groß erscheint.[1]

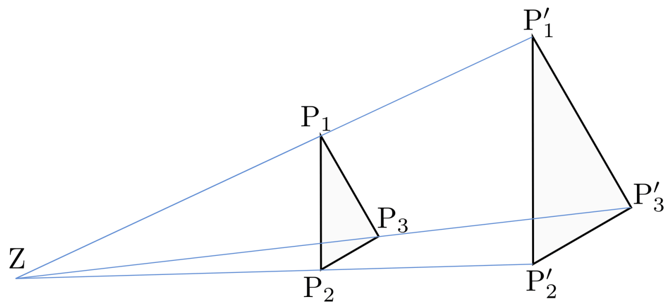


Abb. 40: Beispiel einer zentrischen Streckung mit $\lambda > 1$.

Der Faktor λ wird Skalierungsfaktor (umgangssprachlich auch als "Maßstab") genannt. Für λ ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\overline{\mathrm{ZP'}} = \lambda \cdot \overline{\mathrm{ZP}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\overline{\mathrm{ZP'}}}{\overline{\mathrm{ZP}}}$$

Ist $\lambda > 0$, so bleibt die Orientierungsrichtung der Figur, also der Umlaufsinn ihrer Punkte, erhalten. Gilt $1 > \lambda > 0$, so wird die Figur verkleinert ("gestaucht"), im Fall $\lambda > 1$ wird sie vergrößert ("gestreckt"). Für $\lambda = 1$ wird die Figur identisch auf sich selbst abgebildet.

Ist $\lambda < 0$, so liegt die Bildfigur F' im Vergleich zur Originalfigur F auf der gegenüber liegenden Seite des Zentrums Z; ihre Orientierungsrichtung bleibt dabei erhalten. Gilt $|\lambda| < 1$, so wird auch hierbei die Figur verkleinert beziehungsweise im Fall $|\lambda| > 1$ vergrößert.

Bei jeder Ähnlichkeitsabbildung einer Figur F auf eine Figur F' haben einerseits alle entsprechenden Strecken das gleiche Größenverhältnis λ, andererseits bleiben die Größen aller Winkel der Figur F in der Figur F' erhalten. Beide Kriterien können auch genutzt werden, um "Ähnlichkeit" als eine *Relation* zwischen zwei Figuren aufzufassen: Zwei Figuren F und F' sind genau dann einander ähnlich, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen und die entsprechenden Strecken im gleichen Maßstab zueinander stehen. In der mathematischen Kurzform schreibt man hierfür $F \sim F'$.

[1] In der analytischen Geometrie werden Skalierungen von geometrischen Objekten rechnerisch mittels *Skalierungsmatrizen* beschrieben.

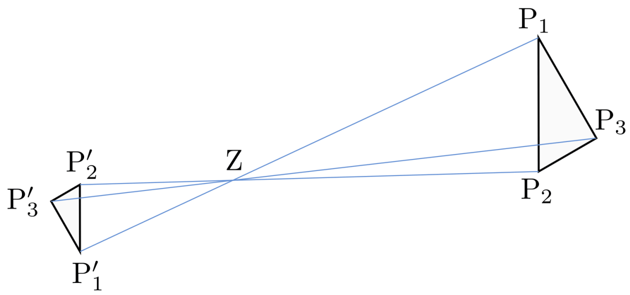


Abb. 41: Beispiel einer zentrischen Streckung mit $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Kongruenzabbildungen

Als Kongruenzabbildung oder "Bewegung" wird jede Abbildung bezeichnet, bei der die Original-Figur und ihr Abbild in Form und Größe übereinstimmen, sich also nur die Lage der Figur im Raum verändert. Lässt sich eine geometrische Figur durch eine beliebige Anzahl von Bewegungen deckungsgleich in eine andere Figur überführen, so nennt man die beiden Figuren kongruent; kongruente Figuren haben stets gleich lange Strecken und gleich große Winkel.[2]

Die vier möglichen Kongruenzabbildungen werden im Folgenden kurz aufgelistet:

Translation einer geometrischen Figur

Um eine Verschiebung ("Translation") zu beschreiben, geht man von einem Vektor $\vec{v}$ aus, für deren Länge $v = |\vec{v}|$ gelten soll. Trägt man an jedem Punkt P einer geometrischen Figur einen ebenso langen, zu $\vec{v}$ parallelen Vektor mit P als Anfangspunkt an, so ergibt sich zu jedem Original-Punkt ein zugehöriger Bildpunkt P$'$.

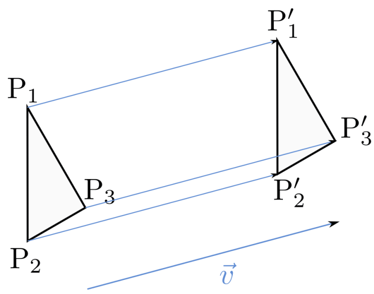


Abb. 42: Beispiel einer Translation.

Die sich ergebende Bildfigur F' wird durch den Verschiebungsvektor $\vec{v}$ gegenüber der Original-Figur F lediglich um die Länge v in Richtung von $\vec{v}$ verschoben; die Größe, Form und Orientierung der Figur bleiben hingegen erhalten.

[2] Jede Kongruenzabbildung kann auch als eine Ähnlichkeitsabbildung mit einem Maßstab von $\lambda = 1$ aufgefasst werden. Umgekehrt lässt sich jede Ähnlichkeitsabbildung aus einer zentrischen Streckung und/oder einer oder mehreren Kongruenzabbildungen zusammensetzen.

Spiegelung einer geometrischen Figur an einer Geraden

Um eine Spiegelung an einer Geraden zu beschreiben, geht man von einer festen Geraden s als Spiegelachse aus. Durch jeden Punkt P einer Figur konstruiert man eine Gerade senkrecht zu s und bestimmt auf dieser den Bildpunkt P′ so, dass P und P′ von der Spiegelachse s den gleichen Abstand haben und auf verschiedenen Seiten von s liegen.

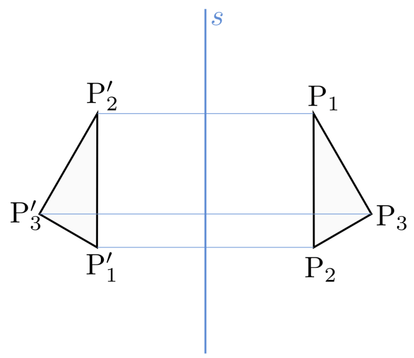


Abb. 43: Beispiel einer Achsenspiegelung.

Der Punkt P′ wird üblicherweise Spiegelbild von P bezüglich s bezeichnet. Bei einer Achsenspiegelung bleibt die Form und Größe der Figur erhalten, es ändert sich jedoch der Umlaufsinn ihrer Punkte.

Spiegelung einer geometrischen Figur an einem Punkt

Um eine Spiegelung an einem Punkt zu beschreiben, geht man von einem festen Punkt S als Symmetriezentrum aus. Durch jeden Punkt P einer Figur legt man dann eine Gerade durch S und bestimmt auf dieser den Bildpunkt P′ so, dass P und P′ von S den gleichen Abstand haben und auf verschiedenen Seiten von S liegen.

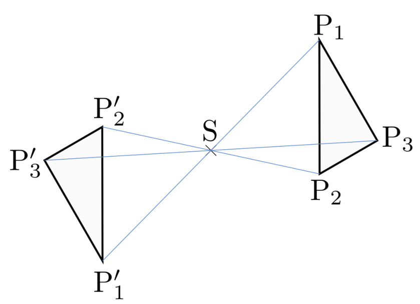


Abb. 44: Beispiel einer Punktspiegelung.

Man kann eine Punktspiegelung ebenso als zentrische Streckung mit einem Maßstab von $\lambda = -1$ oder als Drehung der Ebene um den Punkt s mit einem Drehwinkel von $\alpha = 180\,°$ deuten. Bei einer Punktspiegelung bleibt somit neben der Form und Größe einer Figur auch ihr Umlaufsinn, also die Reihenfolge ihrer Punkte erhalten.

Rotation einer geometrischen Figur

Um eine Drehung ("Rotation") zu beschreiben, geht man von einem bestimmten Punkt Z als Drehzentrum und einem festen Winkel α aus. Durch jeden Punkt P einer Figur zeichnet man einen Kreis um den Mittelpunkt Z und bestimmt auf diesem Kreis den zu P gehörenden Bildpunkt P′ so, dass der Winkel $\sphericalangle \mathrm{PZP}'$ gleich α ist.

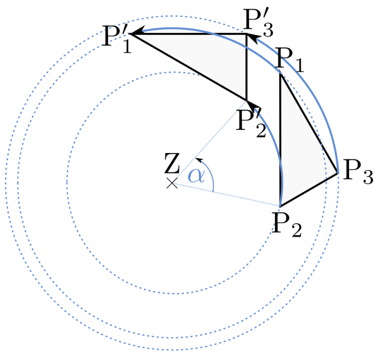


Abb. 45: Beispiel einer Rotation.

Erfolgt die Drehung entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn, so spricht man von einem positiven Drehsinn; bei einer Drehung im Uhrzeigersinn spricht man von einem negativen Drehsinn. Die Form und Größe der Figur sowie die Reihenfolge ihrer Punkte bleibt bei einer Drehung erhalten.

Symmetrie

Als Symmetrie wird die Eigenschaft mancher geometrischer Formen bezeichnet, nach einer bestimmten Transformation wiederum unverändert zu erscheinen.

Achsensymmetrie

Eine beliebige, quer durch eine geometrische Figur verlaufende Gerade oder Strecke wird Transversale genannt. Lässt sich die Figur durch eine dieser Transversalen in zwei gleiche große Teilfiguren aufteilen, die durch Umklappen entlang der Transversalen völlig deckungsgleich zueinander sind, so heißt die Figur achsensymmetrisch. Die beiden Teilstücke der Figur werden dabei als einander entsprechend bezeichnet und die Transversale Symmetrieachse genannt.

Eine Figur kann auch mehrere Symmetrieachsen besitzen. Beispielsweise besitzt ein Rechteck zwei Symmetrieachsen, ein Kreis sogar beliebig viele.

Lassen sich zwei gleich große Figuren durch Umklappen um eine zwischen beiden Figuren liegende Gerade s zur Deckung bringen, so bezeichnet man beide Figuren als achsensymmetrisch zueinander liegend. Achsensymmetrische Figuren haben stets folgende Eigenschaften:

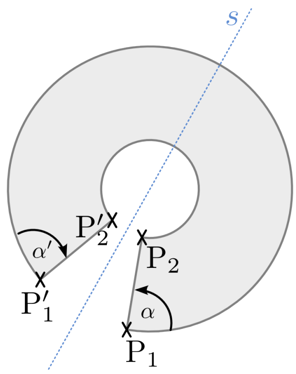


Abb. 46: Beispiel einer achsensymmetrischen Figur.

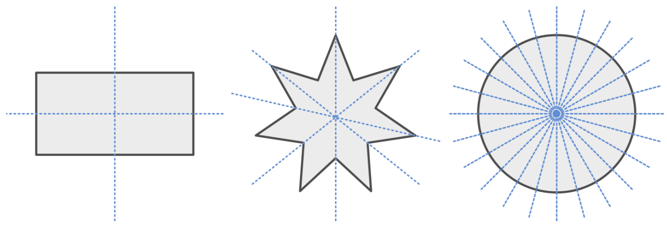


Abb. 47: Beispiel von mehrfach achsensymmetrischen Figuren.

- Einander entsprechende Punkte liegen gleich weit von der Symmetrieachse s entfernt.
- Verbindungslinien zwischen einander entsprechenden Punkten stehen senkrecht auf der Symmetrieachse.
- Einander entsprechende Geraden (sowie Strecken und ihre Verlängerungen) schneiden die Symmetrieachse im gleichen Punkt und im gleichen Winkel.
- Der Umlaufsinn beider Figuren ist umgekehrt, entsprechende Ecken folgen in der einen Figur also im Uhrzeigersinn aufeinander, in der anderen entgegen dem Uhrzeigersinn.

Achsensymmetrische Figuren können ebenso als Paare von achsensymmetrisch liegenden Figuren aufgefasst werden, deren Flächen sich zum Teil überschneiden.

Punktsymmetrie

Ist eine Figur bei einer 180-Drehung um einen im Inneren gelegenen Punkt völlig deckungsgleich mit sich selbst, so heißt die Figur (einfach) punktsymmetrisch. Der Drehpunkt wird dabei als Symmetriezentrum, der Drehwinkel als Symmetriewinkel bezeichnet.

Ist eine Figur bereits nach einer Drehung um einen Winkel $\varphi = \frac{360}{n}$ mit sich selbst deckungsgleich, wobei $n > 2$ eine beliebige natürliche Zahl ist, so heißt die Figur mehrfach punktsymmetrisch. Sie ist bei weiteren Drehungen um den Winkel φ stets erneut deckungsgleich.

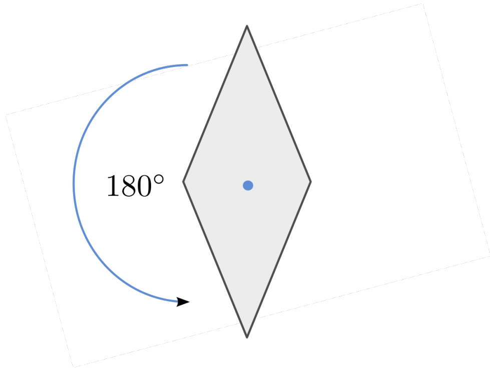


Abb. 48: Beispiel einer punktsymmetrischen Figur.

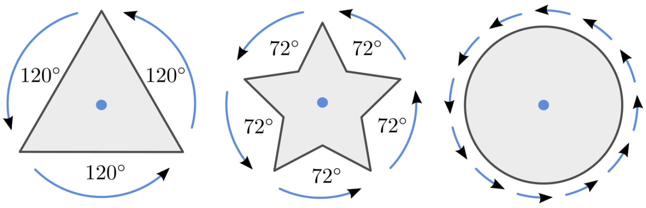


Abb. 49: Beispiel von mehrfach punktsymmetrischen Figuren.

Lassen sich zwei gleich große Figuren durch eine 180-Drehung um einen zwischen beiden Figuren liegenden Punkt S zur Deckung bringen, so bezeichnet man beide Figuren als punktsymmetrisch zueinander liegend. Punktsymmetrische Figuren haben stets folgende Eigenschaften:

- Einander entsprechende Punkte liegen gleich weit vom Symmetriezentrum S entfernt.
- Verbindungslinien zwischen einander entsprechenden Punkten verlaufen durch das Symmetriezentrum.
- Einander entsprechende Geraden (sowie Strecken und ihre Verlängerungen) verlaufen zueinander parallel.
- Der Umlaufsinn beider Figuren ist gleich, entsprechende Ecken folgen in beiden Figuren also entweder im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn aufeinander.

Punktsymmetrische Figuren können ebenso als Paare von punktsymmetrisch liegenden Figuren aufgefasst werden, deren Flächen sich zum Teil überschneiden.

Dreiecke

Allgemeine Eigenschaften

Dreiecke bestehen aus den Verbindungsstrecken zwischen drei Punkten A, B und C, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Die den Punkten jeweils gegenüber liegenden

Strecken werden kurz als a, b und c, die Innenwinkel als α, β und γ bezeichnet. Die Nebenwinkel α^*, β^* und γ^* der Innenwinkel heißen Außenwinkel.

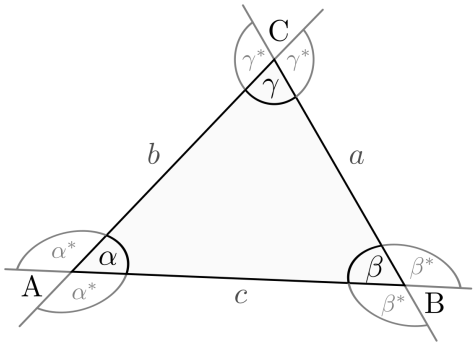


Abb. 50: Aufbau eines allgemeinen Dreiecks.

Legt man durch C eine Parallele zu Strecke $\overline{\text{AB}}$, so sind α und α' sowie β und β' als *Wechselwinkel* gleich groß. Gemeinsam mit dem Winkel γ bilden α' und β' einen $180\,°$-Winkel. Die Summe der Innenwinkel α, β und γ ist somit ebenfalls stets $180\,°$:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180\,° \tag{64}$$

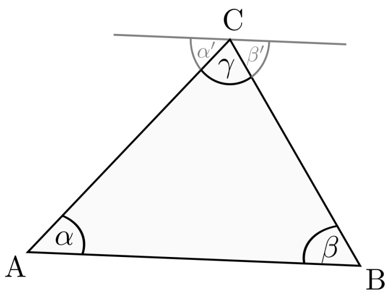


Abb. 51: Die Innenwinkel eines Dreiecks addieren sich zu 180°.

Die Außenwinkel sind jeweils so groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Dies folgt beispielsweise für den Winkel α^* aus Gleichung (64) wegen $\alpha^* = 180° - \alpha = \beta + \gamma$. Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \beta + \gamma \\ \beta^* &= \gamma + \alpha \\ \gamma^* &= \alpha + \beta \end{aligned} \tag{65}$$

Die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°. Weiterhin gelten in allen Dreiecken drei weitere Beziehungen:

- Die Summe zweier Seitenlängen ist stets größer als die Länge der dritten Seite. Es gelten somit folgende Ungleichungen:

$$a + b > c \quad ; \quad b + c > a \quad ; \quad c + a > b$$

- Die Differenz zweier Seitenlängen ist stets kleiner als die Länge der dritten Seite. Somit gilt:

$$|a-b| < c \quad ; \quad |b-c| < a \quad ; \quad |c-a| < b$$

- In jedem Dreieck liegen die größeren Seiten den größeren Winkeln gegenüber. Umgekehrt liegen die größeren Winkel den größeren Seiten gegenüber. Es gilt somit beispielsweise:

$$a > b \;\Rightarrow\; \alpha > \beta$$

Kongruenz und Ähnlichkeit

Zwei Dreiecke sind dann *kongruent*, wenn sie eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

- Übereinstimmung dreier Seiten (SSS)
- Übereinstimmung zweier Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel (SWS)
- Übereinstimmung zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel (SSW)
- Übereinstimmung einer Seite und zweier Winkel – entweder den beiden anliegenden Winkeln oder einem anliegenden und einem gegenüber liegenden Winkel (WSW beziehungsweise SWW)

Die obigen Kongruenzbedingungen werden einerseits für geometrische Beweise genutzt, können jedoch auch zur eindeutigen Festlegung von Dreiecken verwendet werden.

Zwei Dreiecke sind dann einander *ähnlich*, wenn sie eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

- Gleiche Längenverhältnisse aller drei Seiten
- Gleiche Längenverhältnisse zweier Seiten und Übereinstimmung des von ihnen eingeschlossenen Winkels
- Gleiche Längenverhältnisse zweier Seiten und Übereinstimmung des der größeren Seite gegenüber liegenden Winekls
- Übereinstimmung zweier Winkel

Beispielsweise lassen sich die *Zentrische Streckung* oder die *Strahlensätze* auf Ähnlichkeiten von Dreiecken zurückführen.

Besondere Punkte im Dreieck

In jedem Dreieck gibt es vier besondere Punkte, die sich durch bestimmte Transversalen, d.h. durch das Dreieck verlaufende Geraden, konstruieren lassen. Alle diese Punkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden, die auch "Eulersche Gerade" genannt wird.

Der Schwerpunkt

Verbindet man jeden Eckpunkt mit dem Mittelpunkt der gegenüber liegenden Dreiecksseite, so schneiden sich diese "Seitenhalbierenden" in einem gemeinsamen Punkt S, der Schwerpunkt des Dreiecks genannt wird.

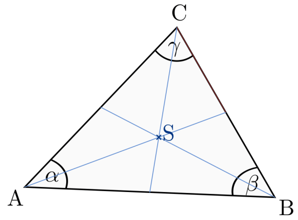


Abb. 52: Schwerpunkt eines Dreiecks.

Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2 : 1. Es bestehen also folgende Proportionen:

$$\frac{\overline{\mathrm{AS}}}{\overline{\mathrm{SM_a}}} = \frac{\overline{\mathrm{BS}}}{\overline{\mathrm{SM_b}}} = \frac{\overline{\mathrm{CS}}}{\overline{\mathrm{SM_c}}} = \frac{2}{1}$$

Der Mittelpunkt

Zeichnet man auf jeder Dreiecksseite den Mittelpunkt ein und konstruiert ausgehend von diesem eine senkrechte Gerade zur jeweiligen Dreiecksseite, so schneiden sich diese "Mittelsenkrechten" in einem gemeinsamen Punkt M. Dieser Punkt wird Mittelpunkt des Dreeicks genannt und ist der Mittelpunkt des so genannten Umkreises, also des Kreises, der durch alle Eckpunkte des Dreiecks verläuft.

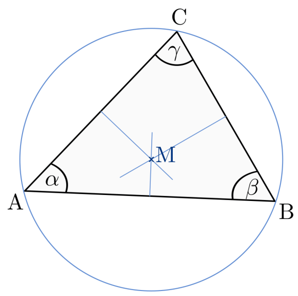


Abb. 53: Mittelpunkt eines Dreiecks.

Der Mittelpunkt des Inkreises

Konstruiert man zu jedem Innenwinkel eines Dreiecks die Winkelhalbierende, so schneiden sich diese in einem gemeinsamen Punkt W. Dieser ist zugleich der Mittelpunkt des Inkreises, also des Kreises, der alle Strecken des Dreiecks berührt.

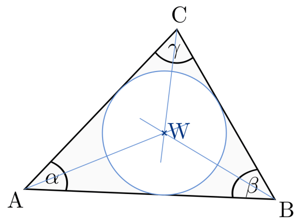


Abb. 54: Inkreis-Mittelpunkt eines Dreiecks.

Der Höhenschnittpunkt

Konstruiert man auf jeder Dreiecksseite eine Senkrechte durch den gegenüber liegenden Eckpunkt, so schneiden sich die drei Höhen in einem gemeinsamen Punkt H.

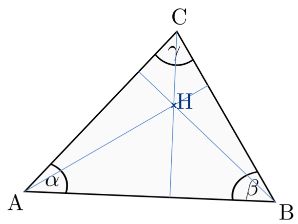


Abb. 55: Höhenschnittpunkt eines Dreiecks.

Besondere Dreiecke

Gleichseitiges Dreieck

In einem gleichseitigen Dreieck besitzen alle Seiten die gleiche Länge. Alle Winkel betragen 60 °, die besonderen Punkte S, M, W und H sind in einem Punkt vereint.

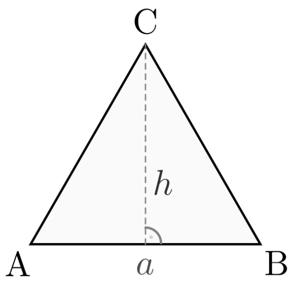


Abb. 56: Grundform eines gleichseitigen Dreiecks.

Für die Fläche und den Umfang eines gleichseitigen Dreiecks gilt mit der Höhe $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$:

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{a^4}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{Umfang} = 3 \cdot a$$

Gleichschenkliges Dreieck

In einem gleichschenkligen Dreieck besitzen die zwei Seiten a und b die gleiche Länge. Die beiden "Basiswinkel" α und β sind gleich groß. Ist ein Winkel bekannt, lassen sich die übrigen Winkel unmittelbar mit Hilfe der Beziehung $2 \cdot \alpha + \gamma = 180$ bestimmen.

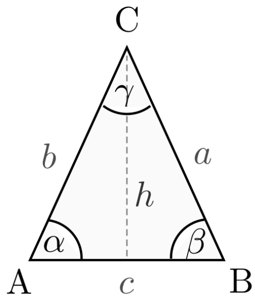


Abb. 57: Grundform eines gleichschenkligen Dreiecks.

Für die Fläche und den Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks gilt mit der Höhe h:

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

$$\text{Umfang} = 2 \cdot a + c$$

Rechtwinkliges Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel gleich $90\,°$, die anderen beiden Winkel α und β ergeben zusammen $90\,°$.[1]

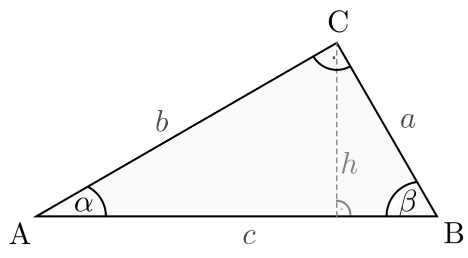


Abb. 58: Grundform eines rechtwinkligen Dreiecks.

Für die Fläche und den Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks gilt:[2]

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

$$\text{Umfang} = a + b + c$$

[1] Gilt $\alpha = \beta = 45$, so spricht man von einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck.
[2] Da die Seiten a und b senkrecht aufeinander stehen, stellen sie gegenseitig Basislinie und Höhe dar.

Der Satz von Pythagoras

Rechtwinklige Dreiecke weisen eine Besonderheit auf: Quadriert man die Längen der Dreieckseiten, so entspricht die Quadratzahl c^2 der längsten Dreieckseite (der "Hypothenuse") genau der Summe der Quadratzahlen a^2 und b^2 der kürzeren Dreieckseiten (der "Katheten").

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{66}$$

Diese als "Satz des Pythagoras" bekannt gewordene Gesetzmäßigkeit lässt sich graphisch dadurch veranschaulichen, indem man entlang der Hypothenuse c und den beiden Katheten a und b Quadrate mit den entsprechenden Seitenlängen zeichnet und die Flächeninhalte miteinander vergleicht: Die Flächen der beiden kleineren Quadrate a^2 und b^2 sind mit dem großen Quadrat c^2 flächengleich.

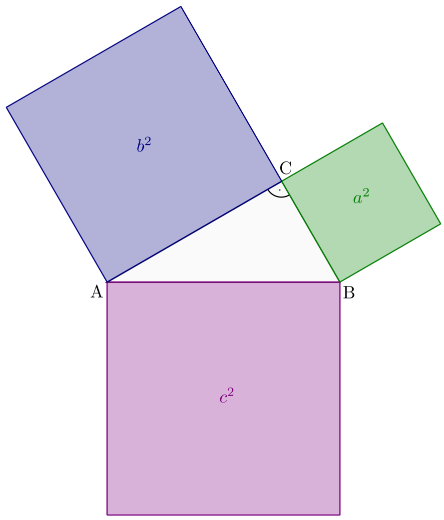


Abb. 59: Veranschaulichung des Satzes von Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke.

Der Satz des Pythagoras erweist sich in der Praxis als nützlich, um zwei Bretter, Stangen o.ä. mit bekannten Längen a und b rechtwinklig zueinander anzuordnen. Löst man Gleichung (66) nach der Länge der Verbindungslinie c auf, so ergibt sich

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Liegen die Eckpunkte A und B exakt um $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ voneinander entfernt, so beträgt der Winkel zwischen a und b genau $90\,°$. Geeignet ist insbesondere das Längenverhältnis $3:4:5$, da hierbei $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ gilt; die Länge der Basis-Einheit kann frei gewählt werden.

Höhen- und Kathetensatz

Im rechtwinkligen Dreieck gelten darüber hinaus zwei weitere Beziehungen:

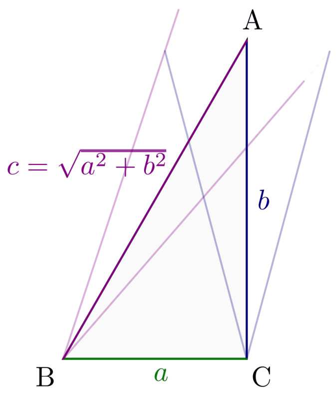


Abb. 60: Der Satz von Pythagoras als Konstruktionshilfe für rechte Winkel.

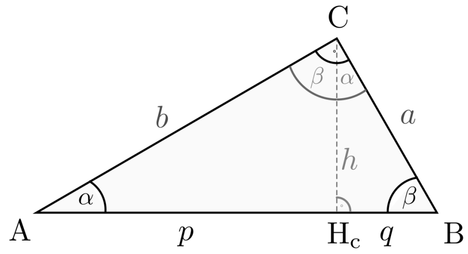


Abb. 61: Der Katheten- und Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke.

- **Höhensatz:** Das Produkt der beiden Hypothenusenteile p und q , die rechts und links der Höhe h liegen, ist gleich dem Quadrat der Höhe:

$$h^2 = p \cdot q$$

- Kathetensatz: Das Produkt einer Kathete ist gleich dem Produkt aus der Hypothenuse c und dem anliegenden Hypothenusenanteil:[3]

$$a^2 = c \cdot q$$

$$b^2 = c \cdot p$$

Diese beiden Gesetzmäßigkeiten wurden bereits von Euklid entdeckt. Sie beruhen darauf, dass die Dreiecke ABC und die beiden durch die Höhe h entstehenden Dreiecke AH_cC und H_cBC zueinander ähnlich sind: Alle enthalten einen rechten Winkel und haben je eine Dreiecksseite gemeinsam, zudem haben alle Dreiecke wegen Gleichung (64) den Winkel α gemeinsam.

Aufgrund der Ähnlichkeit sind die Verhältnisse der Seitenlängen gleich, es gilt beispielsweise für die Dreiecke H_cCB und AH_cC das Längenverhältnis $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$, das sich auch als

[3] Der Kathetensatz von Euklid beinhaltet auch den Satz von Pythagoras. Addiert man nämlich die beiden Gleichungen $a^2 = c \cdot q$ und $b^2 = c \cdot p$, so erhält man:

$$a^2 + b^2 = c \cdot q + c \cdot p = c \cdot (p + q) = c \cdot c = c^2$$

$h^2 = p \cdot q$ schreiben lässt und somit dem Höhensatz entspricht. Ebenso folgen die beiden Kathetensätze aus den Längenverhältnissen $\frac{c}{a} = \frac{a}{q}$ der Dreiecke ABC und H_cBC sowie $\frac{c}{b} = \frac{b}{p}$ der Dreiecke ABC und AH_cC.

Weitere Eigenschaften

Auf weitere Zusammenhänge in Dreiecken wird im Abschnitt *Trigonometrie* näher eingegangen.

Vierecke

Das Quadrat

In einem Quadrat besitzen alle Seiten die gleiche Länge. Alle Winkel betragen 90.

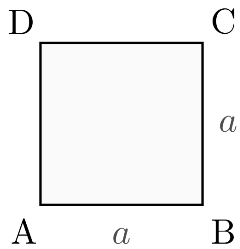


Abb. 62: Grundform eines Quadrats.

Quadrate haben folgende besondere Eigenschaft:

- Jedes Rechteck ist zweifach achsensymmetrisch; die beiden Symmetrieachsen verlaufen jeweils senkrecht durch die Mittelpunkte der Seiten.
- Die beiden Diagonalen sind gleich lang.

Für die Fläche und den Umfang eines Quadrats gilt:

$$\text{Fläche} = a \cdot a = a^2$$

$$\text{Umfang} = 4 \cdot a$$

Das Rechteck

In einem Rechteck besitzen die jeweils gegenüber liegenden Seiten die gleiche Länge. Alle Winkel betragen 90°.

Rechtecke haben folgende besondere Eigenschaft:

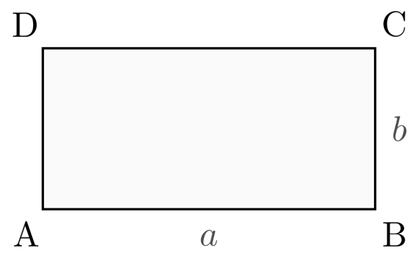


Abb. 63: Grundform eines Rechtecks.

- Jedes Rechteck ist zweifach achsensymmetrisch; die beiden Symmetrieachsen verlaufen jeweils senkrecht durch die Mittelpunkte der Seiten.
- Die beiden Diagonalen sind gleich lang.

Für die Fläche und den Umfang eines Rechtecks gilt:

$$\text{Fläche} = a \cdot b$$

$$\text{Umfang} = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

Das Parallelogramm

In einem Parallelogramm besitzen die jeweils gegenüber liegenden Seiten die gleiche Länge. Die jeweils gegenüber liegenden Winkel sind betragsmäßig gleich.

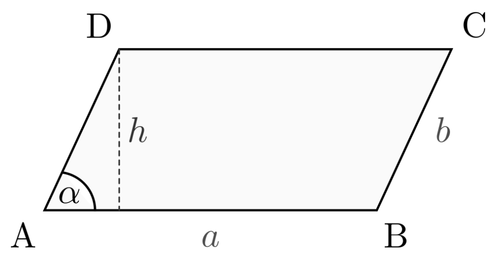


Abb. 64: Grundform eines Parallelogramms.

Parallelogramme haben folgende besondere Eigenschaft:

- Jedes Parallelogramm ist punktsymmetrisch bezüglich des Schnittpunkts der beiden Diagonalen.
- Die beiden Diagonalen halbieren sich gegenseitig.
- Je zwei benachbarte Winkel ergeben in Summe $180°$.

Für die Fläche und den Umfang eines Parallelogramms gilt:

$$\text{Fläche} = a \cdot b \cdot \sin\alpha = a \cdot h$$

$$\text{Umfang} = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

Hat ein Parallelogramm vier gleich lange Seiten, so bezeichnet man es als “Rhombus”.

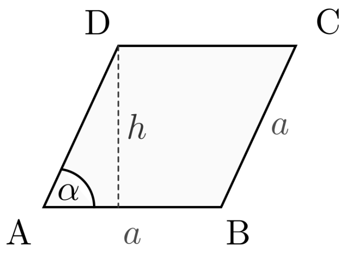


Abb. 65: Grundform eines Rhombus.

Das Trapez

Bei einem Trapez verlaufen (mindestens) zwei Seiten parallel zueinander.

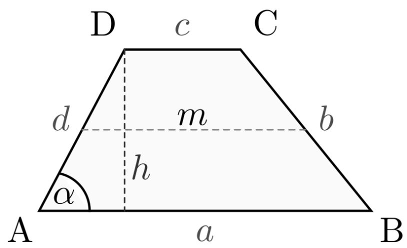


Abb. 66: Grundform eines Trapezes.

Trapeze haben folgende besondere Eigenschaft:

- Zeichnet man mittig zwischen die beiden parallel verlaufenden Seiten a und c eine weitere parallele Strecke m zwischen den übrigen Seiten des Vierecks ein, so entspricht die Länge dieser als “Mittelparallele” bezeichneten Strecke dem arithmetischen Mittelwert der beiden parallelen Seiten:

$$m = \frac{a+c}{2}$$

Für die Fläche und den Umfang eines Trapezes gilt:

$$\text{Fläche} = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$$

$$\text{Umfang} = a + b + c + d$$

Auch andere Sonderformen von Vierecken haben parallel verlaufende Seiten: Rhombus, Parallelogramm, Rechteck und Quadrat. Diese bereits beschriebenen Vierecke stellen somit Sonderformen eines Trapezes dar.

Das Drachenviereck

Bei einem Drachenviereck sind zwei aneinander anliegende Seiten a und b gleich lang; ebenso sind die beiden übrigen Seiten c und d gleich lang.

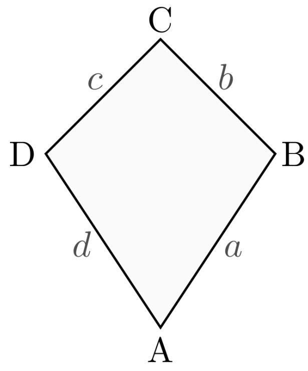


Abb. 67: Grundform eines Drachenvierecks.

Drachenvierecke haben folgende besondere Eigenschaften:

- Jedes Drachenviereck hat senkrecht zueinander verlaufende Diagonalen.
- Jedes Drachenviereck kann in zwei gleichschenklige Dreiecke unterteilt werden
- Jedes Drachenviereck hat (mindestens) zwei gleich große Gegenwinkel.
- Jedes Drachenviereck ist achsensymmetrisch.

Die Kriterien eines Drachenvierecks werden auch von jedem Rhombus und jedem Quadrat erfüllt; diese Vierecke stellen somit Sonderformen eines Drachenvierecks dar.

Regelmäßige Vielecke

Ein n-Eck, bei dem alle Seiten gleich lang und alle Innen- beziehungsweise Außenwinkel gleich groß sind, wird regelmäßige Vieleck genannt.

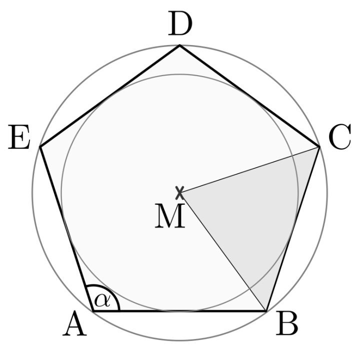


Abb. 68: Beispiel eines regelmäßigen Vielecks

Regelmäßige Vielecke haben folgende Eigenschaften:

- Jedes regelmäßige n-Eck hat jeweils n Ecken, n Seiten, n Innen- beziehungsweise Außenwinkel sowie $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ Diagonalen.
- Jedes regelmäßige n-Eck ist n-fach punktsymmetrisch.
- Um jedes regelmäßige n-Eck lässt sich ein Kreis zeichnen, der durch alle Ecken verläuft; diesen bezeichnet man als Umkreis.
- In jedes regelmäßige n-Eck lässt sich ein Kreis zeichnen, der alle Seitenmitten berührt; diesen bezeichnet man als Inkreis.
- Das gemeinsame Zentrum von Um- und Inkreis ist der Mittelpunkt des Vielecks.
- Verbindet man den Mittelpunkt mit den Ecken, so erhält man n kongruente, gleichschenklige Dreiecke; diese werden auch "Bestimmungsdreiecke" genannt.
- Jeder Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks beträgt $\frac{n-2}{n}\cdot 180\,°$.
- Jeder Außenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks beträgt $\frac{360\,°}{n}$.

Bezeichnet die Seitenlänge mit s, den Radius des Inkreises mit r_1 und den Radius des Umkreises mit r_2, so gilt für den Umfang und die Fläche eines regelmäßigen n-Ecks:

$$\text{Fläche} = \frac{n}{2}\cdot s\cdot r_1 = \frac{n}{2}\cdot s\cdot\sqrt{r_2^2-\frac{s^2}{4}}$$

$$\text{Umfang} = n\cdot s$$

Beliebige (auch nicht regelmäßige) Vielecke haben zudem allgemein folgende Eigenschaften:

- Die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks beträgt $(n-2)\cdot 180\,°$.
- Die Summe der Außenwinkel eines n-Ecks beträgt stets $360\,°$.
- Ein Innenwinkel und sein zugehöriger Außenwinkel betragen in Summe stets $180\,°$ (da es sich um Nebenwinkel handelt).
- Die Winkelhalbierenden eines Innenwinkels und die des zugehörigen Außenwinkels sind zueinander stets senkrecht.

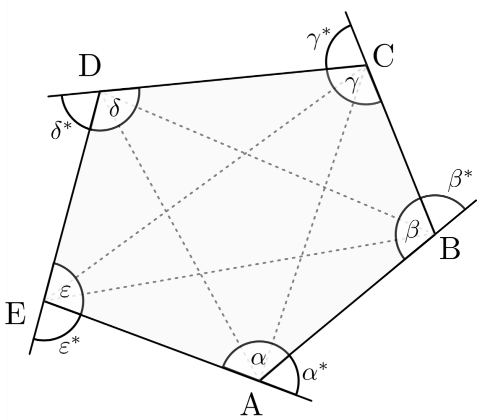


Abb. 69: Beispiel eines unregelmäßigen Vielecks

Per Festlegung haben n-Ecke zudem keine nach innen zeigenden Ecken sowie keine einander schneidenden Seiten.

Kreis und Ellipse

Der Kreis

Jeder Kreis besitzt als Besonderheit, dass alle Punkte auf der Kreislinie gleich weit vom Mittelpunkt M entfernt liegen.

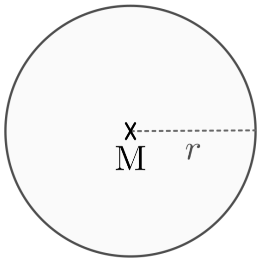


Abb. 70: Grundform eines Kreises.

Für den Umfang und die Fläche eines Kreises mit Radius r gilt:

$$\begin{aligned} \text{Umfang} &= 2 \cdot \pi \cdot r \\ \text{Fläche} &= \pi \cdot r^2 \end{aligned} \tag{67}$$

Dabei wird $\pi \approx 3,14159265...$ als "Kreiszahl" bezeichnet.

Der Kreisbogen

Wird anstelle eines ganzen Kreises nur ein Teil der Kreislinie gezeichnet, so bezeichnet man den entsprechenden Kreisteil als Kreisbogen.

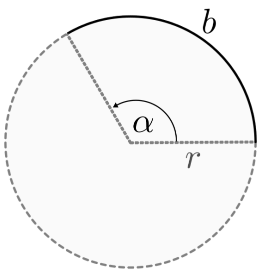


Abb. 71: Der Kreisesbogen als Teil des Kreisumfangs.

Die Länge eines Kreisbogens hängt vom Umfang des entsprechenden Kreises ab und davon, welchen Anteil des gesamten Kreises der Kreisbogen ausmacht. Dieser Anteil wird durch den Mittelpunktswinkel α beschrieben, wobei $\alpha = 360$ einer vollen Umdrehung entspricht.

Gilt $\alpha < 360$, so steht die Kreisbogenlänge s im gleichen Verhältnis zum Umfang $2 \cdot \pi \cdot r$ des ganzen Kreises wie α zu 360:

$$\frac{s}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{\alpha}{360}$$

Nach dieser Gleichung, aufgelöst nach s, ergibt sich für die Länge des Kreisbogens:

$$s = \frac{\alpha}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \tag{68}$$

Gradmaß und Bogenmaß

Der Mittelpunktswinkel α eines Kreisbogens wird gewöhnlich im Gradmaß angegeben. 360 entsprechen dabei dem vollen Kreisumfang. Betrachtet man einen Einheitskreis (Radius $r = 1$), so hat in diesem Fall der Kreisumfang beziehungsweise ein geschlossener Kreisbogen eine Länge von $s = 2 \cdot \pi$. Damit kann der Mittelpunktswinkel α auch durch die Länge s des Kreisbogens angegeben werden, wobei $2 \cdot \pi$ dem vollen Kreisumfang entspricht.

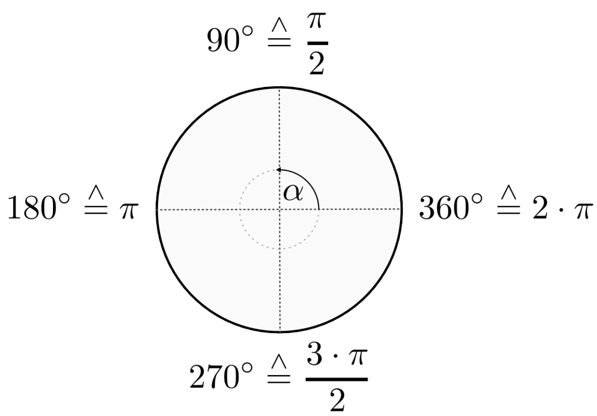


Abb. 72: Gradmaß und Bogenmaß an einem Einheitskreis ($r = 1$).

Für einen Einheitskreis kann folgende "Umrechnung" zwischen dem Gradmaß und dem Bogenmaß verwendet werden:

$$360 \mathrel{\hat{=}} 2 \cdot \pi$$

Um einen Winkel vom Gradmaß ins Bogenmaß umzurechnen, wird dieser durch 360 geteilt und mit $2 \cdot \pi$ multipliziert. Im umgekehrten Fall lässt sich ein Winkel vom Bogenmaß ins Gradmaß umrechnen, indem er durch $2 \cdot \pi$ geteilt und mit 360 multipliziert wird.[1]

Die Grundeinheit $\frac{1}{2 \cdot \pi}$ des Bogenmaßes wird auch als "Radiant" (1 rad) bezeichnet. Ein Radiant entspricht ungefähr einem Winkelmaß von $57{,}3°$.

[1] Gilt für den Radius eines Kreisbogens $r \neq 1$, so muss bei der Umrechnung des Mittelpunktswinkels α vom Grad- ins Bogenmaß die Länge des Kreisbogens s mit dem Radius r multipliziert werden. Umgekehrt ist bei der Umrechnung des Mittelpunktswinkels vom Bogenmaß ins Gradmaß die Kreisbogenlänge s durch den Radius r zu dividieren.

Der Kreissektor

Verbindet man einen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt, so ergibt sich eine Fläche in Form eines Tortenstücks. Mathematisch wird diese Fläche als Kreissektor bezeichnet.

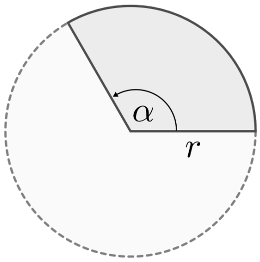


Abb. 73: Der Kreissektor als Teil der Kreisfläche.

Der Flächeninhalt eines Kreissektors entspricht – analog zum Kreisbogen – dem $\alpha/360$-sten Anteil der Gesamt-Kreisfläche $\pi \cdot r^2$:

$$\text{Fläche des Kreissektors} = \frac{\alpha}{360\,°} \cdot \pi \cdot r^2$$

Sehnen und Tangenten

Als Kreissehne bezeichnet man eine Strecke, die zwischen zwei auf einem Kreis liegenden Punkten verläuft. Jede Kreissehne (mit Ausnahme des Durchmessers) unterteilt den Kreis in zwei verschieden große Kreisbögen; den kleineren von beiden nennt man den zur Sehne gehörenden Kreisbogen. Der Winkel zwischen dem Mittelpunkt und den beiden Endpunkten einer Sehne heißt Zentriwinkel.

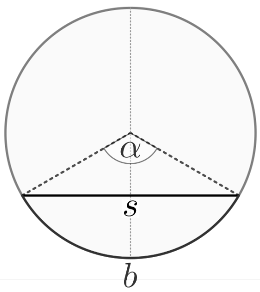


Abb. 74: Kreissehne, Kreisbogen und Zentriwinkel.

Kreissehnen bringen folgende Eigenschaften mit sich:

- Die durch den Mittelpunkt des Kreises und den Mittelpunkt der Sehne verlaufende Gerade halbiert die beiden Kreisbögen und den Zentriwinkel; sie ist Symmetrieachse des Dreiecks, das aus den Endpunkten der Sehne und dem Kreismittelpunkt gebildet wird.
- Sind zwei Sehnen gleich lang, so sind aufgrund der Punktsymmetrie des Kreises auch die zugehörigen Kreisbögen, Zentriwinkel und Kreissektoren gleich groß.

Sind zwei Sehnen unterschiedlich lang, so gehört zur größeren Sehne der größere Kreisbogen sowie der größere Zentriwinkel.

Verschiebt man eine Sekante parallel, bis sie den Kreis nur noch in einem einzigen Punkt berührt, so spricht man von einer Tangente. Jede Tangente steht senkrecht auf der zum Berührpunkt gehörenden Radius-Linie.

Kreiswinkel

Jeder Sehne beziehungsweise jedem Kreisbogen kann eindeutig ein Zentriwinkel zugeordnet werden. Verbindet man die Endpunkte der Sehne mit einem beliebigen Punkt, der auf dem "entfernten" (großen) Kreisbogen liegt, so erhält man so genannte "Peripherie-Winkel". Diese Peripherie-Winkel eines Kreisbogens sind allesamt gleich groß; betraglich sind sie halb so groß wie der zum Kreisbogen gehörende Zentriwinkel:

$$\alpha = 2 \cdot \beta$$

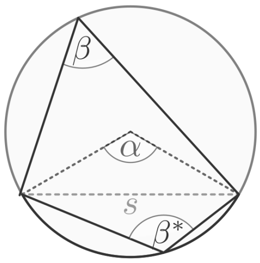


Abb. 75: Zentriwinkel und Peripheriewinkel

Gehören zwei Peripheriewinkel eines Kreises zur selben Sehne, aber zu verschiedenen Kreisbögen, so beträgt die Summe beider Winkel $\beta + \beta^* = 180\,°$. Jede Viereck, das auf diese Weise gebildet wird (dessen vier Ecken also auf einem gemeinsamen Umkreis liegen) nennt man "Sehnenviereck"; in einem solchen beträgt die Summe der jeweils gegenüber liegenden Winkel je $180\,°$

Der Satz des Thales

Beträgt der Zentriwinkel eines Kreisbogens $180\,°$ (was bei jedem Halbkreis der Fall ist), so haben sämtliche Peripheriewinkel des einen Betrag von $90\,°$; sie sind also rechte Winkel.

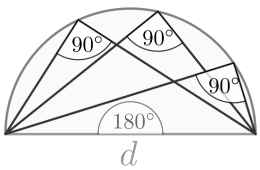


Abb. 76: Konstruktion von rechten Winkel mittels des Satzes von Thales.

Strahlensätze

Wird ein Strahlenbüschel von zwei parallel liegenden Geraden geschnitten, so gilt: Der 1. Strahlensatz:

> Die Abschnitte auf einem Strahl stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie die gleich liegenden Abschnitte auf einem anderen Strahl.
>
> Im linken Teil der Abbildung *Strahlensatz 1* gilt beispielsweise:
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{SA}}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{\mathrm{SC}}}{\overline{\mathrm{CD}}} \tag{69}$$
>
> Im rechten Teil gilt entsprechend:
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{SA}}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{\mathrm{SC}}}{\overline{\mathrm{SB}}} \tag{70}$$

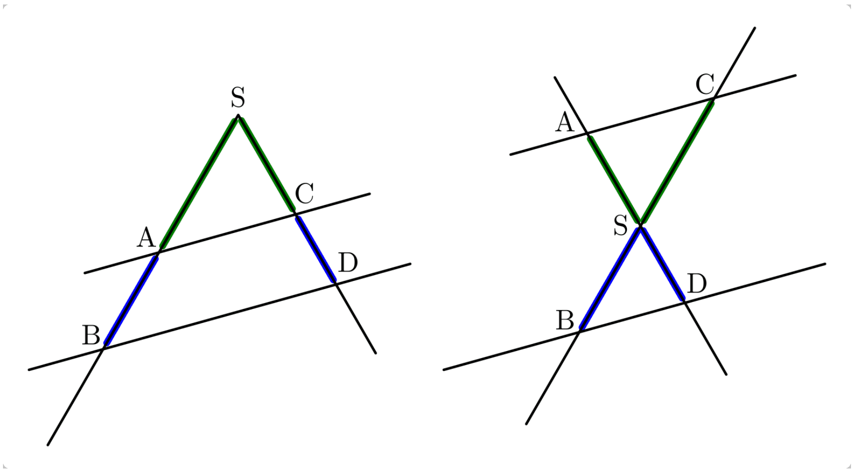


Abb. 77: Der 1. Strahlensatz

Der 2. Strahlensatz:

> Je zwei Parallelenabschnitte, die zwischen gleichen Strahlen liegen, stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie die zugehörigen Strahlenabschnitte des selben Strahls.
>
> Im linken Teil der Abbildung *Strahlensatz 2* gilt beispielsweise:
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{SA}}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BD}}} \tag{71}$$
>
> Im rechten Teil gilt entsprechend:
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{SC}}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BD}}} \tag{72}$$

Der 3. Strahlensatz:

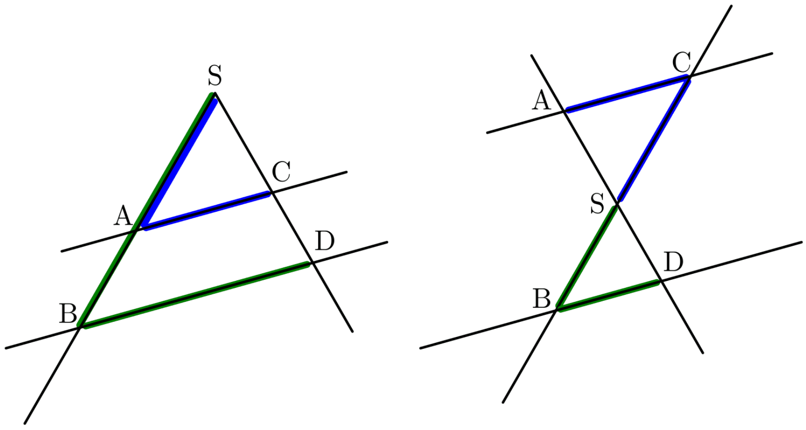


Abb. 78: Der 2. Strahlensatz

Die Abschnitte auf einer Parallelen stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie die zugehörigen Abschnitte auf einer anderen Parallelen.

Im linken Teil der Abbildung *Strahlensatz 3* gilt beispielsweise:

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\overline{\mathrm{DF}}} \tag{73}$$

Im rechten Teil gilt entsprechend:

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{\mathrm{DF}}}{\overline{\mathrm{BF}}} \tag{74}$$

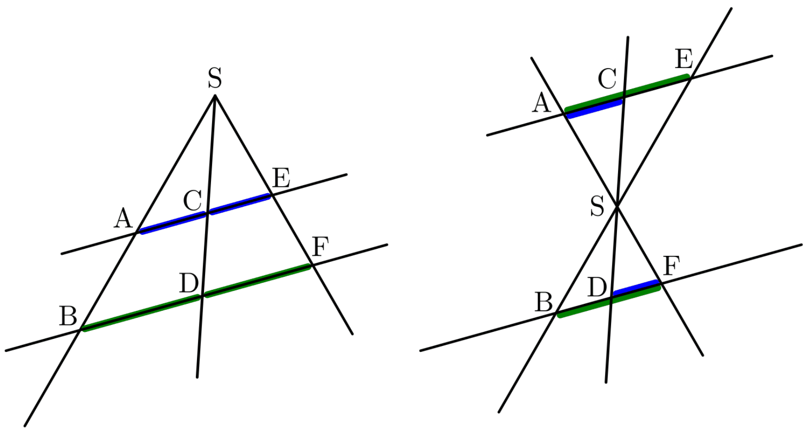


Abb. 79: Der 3. Strahlensatz

Trigonometrie

In der Trigonometrie werden Winkelgrößen in Dreiecken untersucht. Diese spielen in vielen Bereichen der Mathematik und Physik eine wichtige Rolle.

Längenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck wird die an dem betrachteten Winkel α anliegende Kathete als Ankathete, die dem Winkel α gegenüber liegende Seite als Gegenkathete bezeichnet. Die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite wird Hypothenuse genannt.

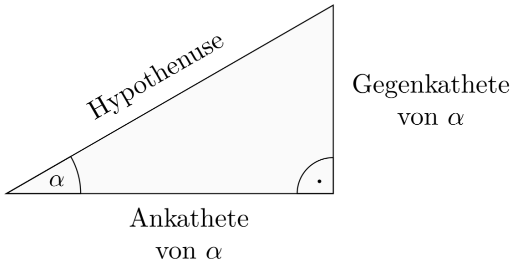


Abb. 80: Gegenkathete, Ankathete und Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck.

Die Längenverhältnisse der Dreieckseiten lassen sich in Abhängigkeit vom Winkel α ausdrücken. Hierzu führt man $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$ als Kurzschreibweisen für Sinus, Cosinus und Tangens ein. Diese bezeichnen folgende Seitenverhältnisse:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{75}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypothenuse}} \tag{76}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{77}$$

Bisweilen definiert man zusätzlich zum Tangens auch einen so genannten "Cotangens", der als Kehrwert des Tangens definiert ist:

$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Gegenkathete von } \alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{78}$$

Die Sinus- und Cosinuswerte sind als Längenverhältnis einer Kathete zur Hypothenuse, da die Hypothenuse die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck ist, stets kleiner als eins. Die Werte des Tangens können für $0° \le \alpha < 90°$ alle Werte zwischen 0 und $+\infty$ annehmen; für $\alpha = 90°$ ist der Tangens nicht definiert, da in diesem Fall durch $\cos(90°) = 0$ dividiert würde.

Eine weitere Eigenschaft von Sinus und Cosinus ergibt sich daraus, dass der Sinus des Winkels α mit dem Cosinus des Winkels β identisch ist. Wegen $\alpha+\beta = 90°$ oder $\alpha = 90°-\beta$ folgt somit:

$$\begin{aligned}
\sin(\beta) &= \sin(90° - \alpha) &= \cos(\alpha) \\
\cos(\beta) &= \cos(90° - \alpha) &= \sin(\alpha) \\
\cot(\beta) &= \tan(90° - \alpha) &= \tan(\alpha)
\end{aligned}$$

Tab. 6: Werte von Sinus, Cosinus und Tangens für besondere Winkel.

α	0	30	45	60	90
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

Der Sinus-Satz

Jedes spitzwinklige Dreieck lässt sich durch Einzeichnen einer Höhenlinie in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Höhe h_c mit der Strecke c als D, so gilt für das Teildreieck ADC:

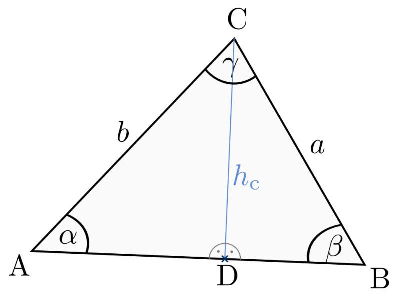


Abb. 81: Unterteilung eines Dreiecks zum Nachweis des Sinus-Satzes.

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \quad \Leftrightarrow \quad h_c = b \cdot \sin(\alpha)$$

Für das Teildreieck DBC gilt entsprechend:

$$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad h_c = a \cdot \sin(\beta)$$

Setzt man die beiden obigen Gleichungen für h_c gleich, so erhält man folgende Beziehung:

$$b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta)$$

Zeichnet man alle drei Höhenlinien ein, so erhält man jeweils eine entsprechende Größengleichung. Formt man diese in Verhältnisgleichungen um, so ergibt sich der folgende "Sinussatz":

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad ; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \quad ; \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$$

Der Sinussatz wird üblicherweise weiter in eine einzige Gleichung zusammengefasst:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \tag{79}$$

Die Seitenlängen eines Dreiecks stehen also im gleichen Verhältnis zueinander wie die Sinuswerte der jeweils gegenüber liegenden Winkel.

Der Sinus-Satz gilt auch in stumpfwinkligen Dreiecken. Man kann ihn nutzen, um beispielsweise fehlende Stücke eines Dreiecks zu berechnen, wenn zwei Seitenlängen und ein gegenüber liegender Winkel oder eine Seitenlänge und zwei Winkel gegeben sind.

Der Cosinus-Satz

In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen, abzüglich dem doppelten Produkt aus diesen beiden Seitenlängen und dem Cosinuswert des eingeschlossenen Winkels. Beispielsweise gilt für beliebige Winkelwerte:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos{(\gamma)} \tag{80}$$

Ist $\gamma = 90°$, so ist $\cos{(\gamma)} = \cos{(90°)} = 0$, und damit $c^2 = a^2+b^2$. Der *Satz von Pythagoras* ist somit ein Sonderfall des Cosinus-Satzes für rechtwinklige Dreiecke.

Für die beiden anderen Seiten a und b gilt entsprechend:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos{(\alpha)}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos{(\beta)}$$

Man kann den Cosinus-Satz zur Konstruktion von Dreiecken nutzen, wenn entweder alle drei Seitenlängen oder zwei Seitenlängen und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Beispiel:

- Welche Werte haben die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten $a = 5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ und $c = 7\,\text{cm}$ lang sind?

  Nach dem Cosinus-Satz gilt:

  $$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos{(\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$$
  $$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos{(\beta)} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \operatorname{acos}\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2 \cdot c \cdot a}\right)$$
  $$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos{(\gamma)} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \operatorname{acos}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)$$

  Setzt man die gegebenen Werte ein, so erhält man:

  $$\alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{6^2+7^2-5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7}\right) \approx 44,415°$$
  $$\beta = \operatorname{acos}\left(\frac{7^2+5^2-6^2}{2 \cdot 7 \cdot 5}\right) \approx 57,122°$$
  $$\gamma = \operatorname{acos}\left(\frac{5^2+6^2-7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6}\right) \approx 78,463°$$

  Für die Summe der Innenwinkel gilt erwartungsgemäß $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Stereometrie

Die Stereometrie ist das geometrische Teilgebiet, in dem Eigenschaften dreidimensionaler Grundformen untersucht werden. Hierbei sind für vielerlei Anwendungen insbesondere die Größe des Volumens und der Oberfläche von regelmäßigen Formen von Interesse.

Das Prinzip von Cavalieri

Schneidet man zwei geometrische Körper mit gleich große Grundfläche und gleicher Höhe in beliebig viele dünne "Scheiben" (wobei die Schnitte stets durch beide Körper in gleicher Höhe verlaufen), so ist das Volumen beider Körper genau dann identisch, wenn jede dieser "Scheiben" eine gleiche Grundfläche aufweist.

Wird beispielsweise, wie in der obigen Abbildung dargestellt, ein Stapel mit quadratischen Karteikarten seitlich verschoben, so bleibt dadurch das Volumen des Stapels unverändert. Die Karten könnten ebenso diagonal zerschnitten und in gedrehter Form aneinandergereiht werden; auch in diesem Fall würde sich das Volumen nicht ändern. Die einzelnen Grundflächen müssen für die Anwendung des Prinzips von Cavalieri somit nicht kongruent sein, sondern nur gleich große Flächeninhalte haben.

Quader, Würfel und Prisma

Quader und Würfel

In einem Quader sind im Allgemeinen alle Seitenlängen unterschiedlich lang, alle Winkel betragen 90°. Für das Volumen V und die Oberfläche A eines Quaders gilt:

$$V_{\text{Quader}} = a \cdot b \cdot c$$
$$A_{\text{Quader}} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

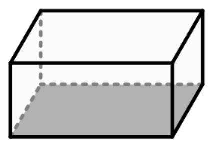


Abb. 82: Grundform eines Quaders.

In einem Würfel – einer Sonderform eines Quaders – sind alle Seitenlängen gleich lang, alle Winkel betragen 90°. Für das Volumen V und die Oberfläche A eines Würfels gilt:

$$V_{\text{Würfel}} = a \cdot a \cdot a = a^3$$
$$A_{\text{Würfel}} = 6 \cdot a^2$$

Prismen

Für das Volumen V und die Oberfläche A eines Prismas gilt:

$$V_{\text{Prisma}} = A_{\text{G}} \cdot h$$
$$A_{\text{M,Prisma}} = A_{\text{S1}} + A_{\text{S2}} + \ldots + A_{\text{Sn}}$$
$$A_{\text{O,Prisma}} = 2 \cdot A_{\text{G}} + A_{\text{M}}$$

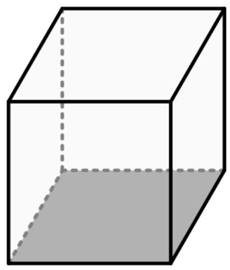


Abb. 83: Grundform eines Würfels.

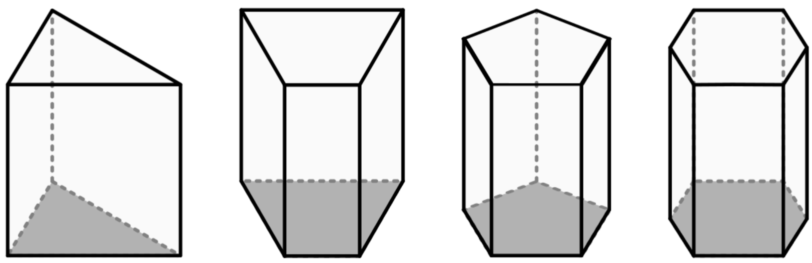


Abb. 84: Prismen mit drei-, vier-, fünf- und sechseckigen Grundflächen.

Pyramide und Pyramidenstumpf

Für das Volumen V und die Oberfläche A einer Pyramide gilt:

$$\begin{aligned} V_{\text{Pyramide}} &= \frac{A_{\text{G}} \cdot h}{3} \\ A_{\text{M,Pyramide}} &= A_1 + A_2 + \ldots + A_{\text{n}} \\ A_{\text{O,Pyramide}} &= A_{\text{G}} + A_{\text{M}} \end{aligned}$$

Für das Volumen V und die Oberfläche A eines Pyramidenstumpfes gilt:

$$\begin{aligned} V_{\text{Pyramidenstumpf}} &= \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_{\text{G}} + \sqrt{A_{\text{G}} \cdot A_{\text{D}}} + A_{\text{D}}) \\ A_{\text{M,Pyramidenstumpf}} &= A_1 + A_2 + \ldots + A_{\text{n}} \\ A_{\text{O,Pyramidenstumpf}} &= A_{\text{G}} + A_{\text{M}} + A_{\text{D}} \end{aligned}$$

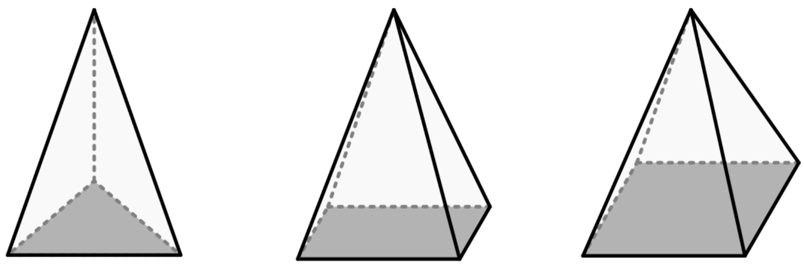


Abb. 85: Pyramiden mit einem Dreieck, einem Rechteck oder einem Quadrat als Grundflächen.

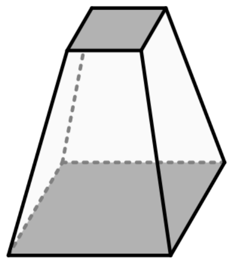


Abb. 86: Pyramidenstumpf einer Quadrat-Pyramide.

Kugel und Kreiszylinder

Für das Volumen V und die Oberfläche A einer Kugel gilt:

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$A_{\text{O,Kugel}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

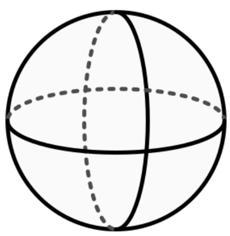


Abb. 87: Grundform einer Kugel.

Für das Volumen V und die Oberfläche A eines Kreiszylinders gilt:

$$V_{\text{Kreiszylinder}} = p \cdot r^2 \cdot h$$

$$A_{\text{M,Kreiszylinder}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_{\text{O,Kreiszylinder}} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot h$$

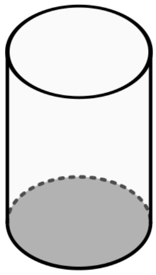


Abb. 88: Grundform eines Kreiszylinders.

Kreiskegel und Kreiskegelstumpf

Für das Volumen V und die Oberfläche A eines Kreiskegels gilt mit $s = \sqrt{r^2 + h^2}$:

$$\begin{aligned} V_{\text{Kreiskegel}} &= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \\ A_{\text{M,Kreiskegel}} &= \pi \cdot r \cdot s \\ A_{\text{O,Kreiskegel}} &= \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s \end{aligned}$$

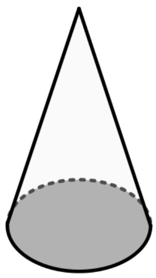


Abb. 89: Grundform eines Kreiskegels.

Für das Volumen V und die Oberfläche A eines Kreiskegelstumpfes gilt mit $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}$:

$$\begin{aligned} V_{\text{Kreiskegelstumpf}} &= \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot \left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2\right) \\ A_{\text{M,Kreiskegelstumpf}} &= \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2) \\ A_{\text{O,Kreiskegelstumpf}} &= \pi \cdot (r_1^2 + r_2^2 + s \cdot (r_1 + r_2)) \end{aligned}$$

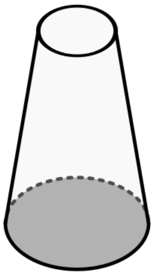


Abb. 90: Grundform eines Kreiskegelstumpfes.

Koordinatensysteme

Koordinatensysteme haben die Aufgabe, die Lage eines Punktes in einer Ebene in übersichtlicher Weise und genau zu beschreiben. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie diese Beschreibung erfolgen kann. Die zwei wichtigsten Koordinatensysteme, das kartesische und das polare, werden in den folgenden Abschnitten kurz beschrieben.

Das kartesische Koordinatensystem

In einem so genannten kartesischen Koordinatensystem ist jeder Punkt der Ebene durch seine Abstände zu den beiden Achsen festgelegt. Diese Abstände werden durch zwei reelle Zahlen angegeben. Dadurch entspricht jedem Punkt ein Zahlenpaar (x,y) und umgekehrt jedem Zahlenpaar (x,y) ein Punkt P.

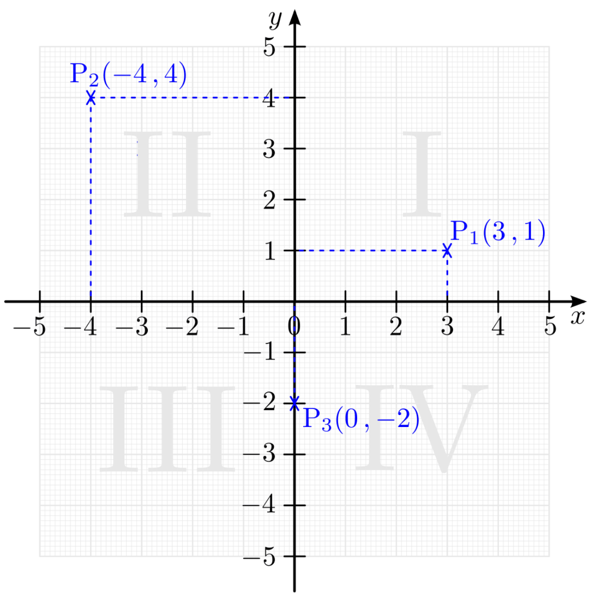


Abb. 91: Darstellung von Punkten in einem kartesischen Koordinatensystem.

Die x-Achse wird bisweilen auch “Abszisse”, die y-Achse “Ordinate” genannt. Auf der x-Achse wird nach rechts positiv, nach links negativ gezählt, auf der y-Achse nach oben positiv, nach unten negativ. Die Ebene des Koordinatensystems wird durch die Achsen in vier Felder aufgeteilt, die "Quadranten" genannt und mit den römischen Ziffern I, II, III und IV bezeichnet werden. In welchem Quadranten ein Punkt liegt, kann anhand der Vorzeichen seiner Koordinaten abgelesen werden.

Quadrant	x	y
I	$+$	$+$
II	$-$	$+$
III	$-$	$-$
IV	$+$	$-$

Abb. 92: Vorzeichen der Koordinaten in den vier Quadranten.

Kartesische Koordinatensysteme stellen die wohl wichtigste Grundlage für Punkt- und Linien-Diagramme in der Statistik dar; sie sind ebenso zur Darstellung der Ergebnismengen von Gleichungen und Ungleichungen in der *Algebra* sowie zur Darstellung von Funktionen in der *Analysis* unentbehrlich.

Das Polarkoordinatensystem

In einem so genannten Polarkoordinatensystem ist jeder Punkt P der Ebene durch seinen Abstand r vom Koordinatenursprung und den Winkel φ seiner Verbindungslinie mit dem Koordinatenursprung und der Horizontalen eindeutig festgelegt.

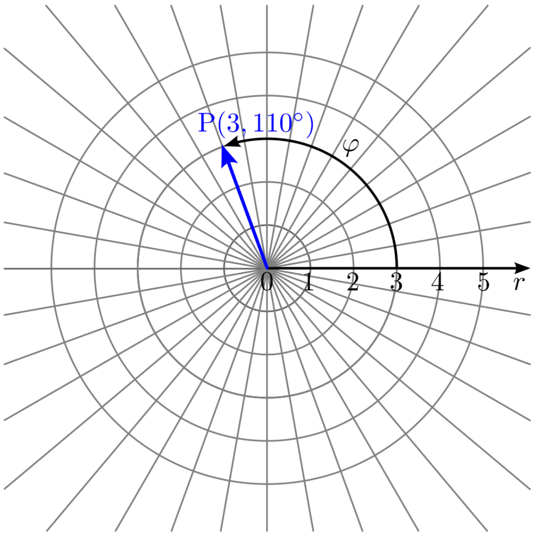


Abb. 93: Darstellung von Punkten in einem polaren Koordinatensystem.

Die Koordinaten r und φ eines Punktes in einem Polarkoordinatensystem und die Koordinaten x und y des selben Punktes in einem kartesischen System lassen sich unmittelbar ineinander umrechnen.

Sind x und y bekannt, so gilt für die Polarkoordinaten r und φ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sind im umgekehrten Fall r und φ bekannt, so gilt für die kartesischen Koordinaten x und y:

$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

Bei der Umrechnung zwischen kartesischen und polaren Koordinaten werden die drei *trigonometrischen Größen* Sinus, Cosinus und Tangens verwendet. Beide Koordinatensysteme haben Vor- und Nachteile, die je nach Art der mathematischen Aufgabenstellung überwiegen. In diesem Sinne ist kein Koordinatensystem dem anderen überlegen; das kartesische wird allerdings weitaus häufiger verwendet.

Analysis

In der Analysis werden Funktionen und ihre Eigenschaften untersucht. Funktionen, also eindeutige *Abbildungen*, weisen in eindeutiger Weise eine Größe einer anderen Größe zu. Im gleichen Sinn werden eindeutige Zuordnungen zwischen zwei (oder mehreren) Größen auch als "funktionale Zusammenhänge" bezeichnet.

Zur Untersuchung von Funktionen zählen insbesondere das Steigungs- und Krümmungsverhalten von Funktionsgraphen, ihr Verhalten im Unendlichen sowie die Bestimmung von Flächeninhalten zwischen verschiedenen Funktionsgraphen.

Eigenschaften von Funktionen

Funktionen lassen sich anhand verschiedener Eigenschaften unterteilen. Wichtige Eigenschaften, die dabei von Bedeutung sind, werden im folgenden Abschnitt kurz zusammengefasst.[1]

Definitions- und Wertemenge

Die Menge an möglichen Werten, welche die Ausgangsgröße ("Variable") x annehmen kann, nennt man Definitionsmenge $\mathbb{D}$. Entsprechend bezeichnet man die Menge an Werten, welche die Funktion $y = f(x)$ als Ergebnisse liefert, als Wertemenge $\mathbb{W}$.

Bisweilen müssen einzelne Werte oder Intervalle aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden, um ein stets eindeutiges Verhalten der Funktion zu gewährleisten.

Beispiele:

- Bei der gebrochen-rationalen Funktion $f(x) = \frac{x}{x-1}$ muss der Wert $x = 1$ aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden, da hierbei ansonsten durch Null dividiert würde.
- Bei der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ müssen alle Werte von $]-\infty;\ 0[$ ausgeschlossen werden, da die Wurzel nur für positive x-Werte definiert ist.

[1] In den folgenden Abschnitten werden nur Funktionen untersucht, deren Werte von nur einer (unabhängigen) Variablen x abhängig sind. Bei der Analysis von Funktionen mit mehreren Veränderlichen kann, sofern alle Variablen unabhängig voneinander sind, der Einfluss jeder Größe einzeln untersucht werden.

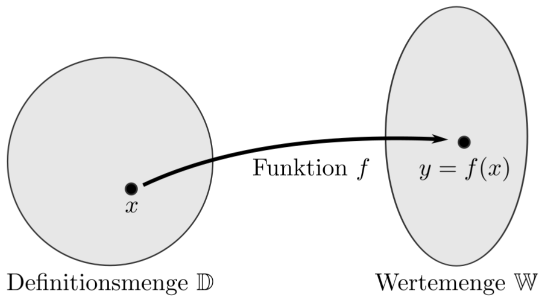


Abb. 94: Eine Funktion weist jedem Wert der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ je einen eindeutigen Wert der Wertemenge $\mathbb{W}$ zu.

Einzelne aus der Definitionsmenge ausgeschlossenen Werte nennt man Definitionslücken. Müssen hingegen Intervalle aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden, so bezeichnet man die verbleibende Definitionsmenge häufig als Definitionsbereich und gibt sie ebenfalls als Vereinigungsmenge von Intervallen an.

Im Folgenden werden ausschließlich "reellwertige" Funktionen untersucht, das heißt Vorschriften, die den reellen Werten einer (unabhängigen) Variablen x ebenfalls reelle Werte der (von x abhängigen) Variablen y zuweisen. Hierbei gilt, sofern keine weiteren Einschränkungen zu beachten sind, somit $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$.[2]

Darstellungen von Funktionen

Funktionen lassen sich im Allgemeinen auf drei verschiedene Arten darstellen:

- als Wertetabelle,
- als Graph in einem Koordinatensystem, und
- in Form einer Funktionsgleichung.

Wertetabellen sind dann sinnvoll, wenn einzelne Wertepaare $(x\,,\,y)$ vorliegen, was insbesondere bei empirisch ermittelten (Mess-)Daten häufig der Fall ist. Bei einer großen Anzahl von Wertepaaren können tabellarische Darstellungen jedoch – ohne die Verwendung von Computern – schnell unübersichtlich werden. Ein zweiter Nachteil liegt darin, dass fehlende Funktionswerte zwischen zwei Wertepaaren nur durch Mittelwertbildung ("Interpolation") abgeschätzt werden können.

Bei graphischen Darstellungen werden die einzelnen Wertepaare $(x\,,\,y)$ in eindeutiger Weise auf Punkte eines Koordinatensystems abgebildet.[3] Sind die Abstände zwischen den Wertepaaren nur sehr gering, so kann der funktionale Zusammenhang graphisch durch eine Kurve veranschaulicht werden. Dies ermöglicht oftmals ein schnelles Ablesen der

[2] Die Untersuchung komplexwertiger Funktionen, die erst im Mathematik-Studium behandelt wird, bezeichnet man als "Funktionentheorie".

[3] Konkret liegt ein Punkt somit genau dann auf der Kurve einer Funktion, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen. Erfüllen das Zahlenpaar (x, y) eines Punktes die Funktionsgleichung nicht, so liegt er entsprechend außerhalb des Funktionsgraphen.

Anzahl n an Steinen	0	1	2	3	4	5
Masse m in kg	0	3	6	9	12	15

Abb. 95: Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs mittels einer Wertetabelle.

Funktionswerte (zumindest näherungsweise). Beispielsweise kann auf diese Weise an Oszilloskopen oder Kardiogrammen der zeitliche Verlauf eines elektrischen Spannungssignals direkt beobachtet werden.[4]

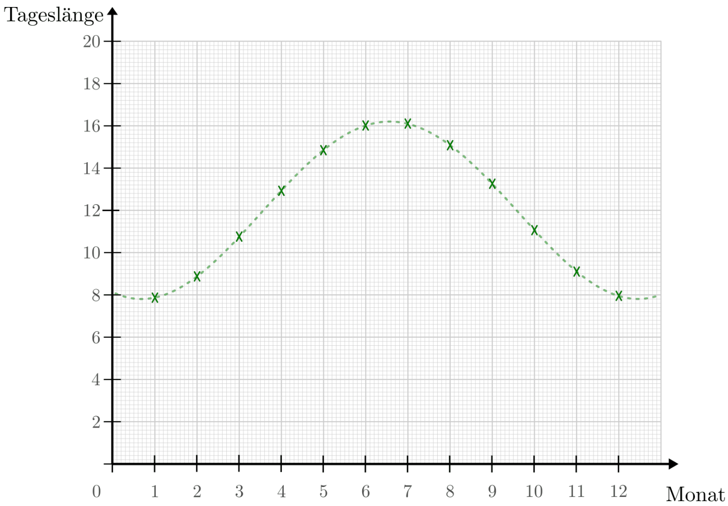


Abb. 96: Darstellung von Wertepaaren mittels eines Diagramms (Beispiel: Tageslänge im Jahresverlauf am 50. Breitengrad).

Wie das Bild einer Funktion bei einer graphischen Darstellung konkret aussieht, hängt auch von der Wahl des Koordinatensystems, insbesondere von der Skalierung der Achsen ab. Weisen beispielsweise die x- und die y-Achse unterschiedliche Skalierungen auf, so erscheint das Funktionsbild verzerrt.

Zur rechnerischen Untersuchung einer Funktion wird die "analytische" Form, also eine Darstellung als Funktionsgleichung bevorzugt. Eine Funktionsgleichung kann wiederum bei Bedarf jederzeit in eine Wertetabelle oder eine graphische Form gebracht werden. Man unterscheidet zwischen zwei Arten von Funktionsgleichungen:

- Bei der *expliziten* Form ist die Funktionsgleichung nach der (abhängigen) Variablen y aufgelöst.

  Beispiel:

$$y = 2 \cdot x^3 - 5$$

[4] Hierbei entspricht die Zeit t der Variablen. Für zeitabhängige Funktionswerte wird daher häufig auch $y = f(t)$ geschrieben.

- Bei einer *impliziten* Form treten die unabhängige Variable x und die abhängige Variable y auf der gleichen Seite der Gleichung auf; die Gleichung hat damit die Form $f(x, y) = 0$.

  Beispiel:

$$2 \cdot x^3 - y + 5 = 0$$

Nicht jede Funktion kann in einer nach y aufgelösten Form dargestellt werden, beispielsweise $x + y + \sin(y) = 0$. Sofern möglich, wird im Allgemeinen die explizite Darstellungsform $y = f(x)$ bevorzugt.[5]

Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Die Unterscheidung von surjektiven, injektiven und bijektiven Funktionen ermöglicht eine wichtige Einteilung von Funktionen.

- Eine Funktion heißt surjektiv, wenn jedes Element ihrer Wertemenge $\mathbb{W}$ *mindestens* einmal als Funktionswert auftritt, also jedes Element der Wertemenge mindestens einem Element der Definitionsmenge zugeordnet ist.

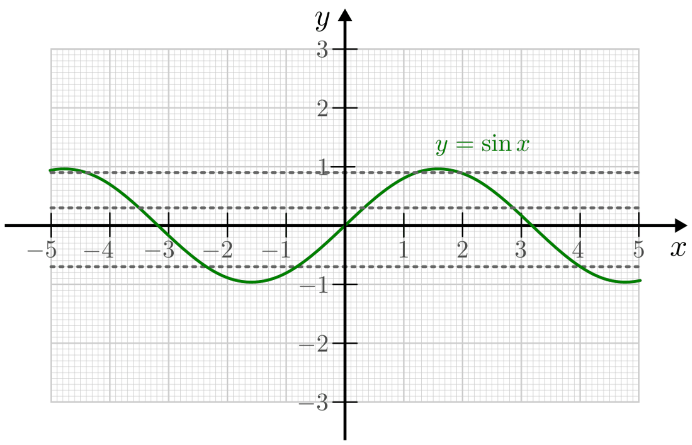


Abb. 97: Beispiel einer surjektiven Funktion (Sinus).

  Am Diagramm einer Funktion lässt sich diese Eigenschaft daran erkennen, dass jede beliebige, zur x-Achse parallele Gerade den Funktionsgraph im gesamten Wertebereich mindestens einmal schneidet.

  Beispiel:

  > Die Sinus-Funktion $f(x) = \sin(x)$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und der Wertemenge $\mathbb{W} = [-1;\ +1]$ ist surjektiv. Der Funktionsgraph wird von jeder zur x-Achse parallelen Geraden zwischen $y = -1$ und $y = 1$ mindestens einmal geschnitten.

[5] Bisweilen wird anstelle der Schreibweise $y = f(x)$ auch die Kurzform $y(x)$ verwendet, um die Abhängigkeit der Variablen y von der Variablen x zum Ausdruck zu bringen.

- Eine Funktion heißt injektiv, wenn jedes Element ihrer Wertemenge $\mathbb{W}$ *höchstens* einmal als Funktionswert auftritt, also jedes Element der Wertemenge maximal einem Element der Definitionsmenge zugeordnet ist.

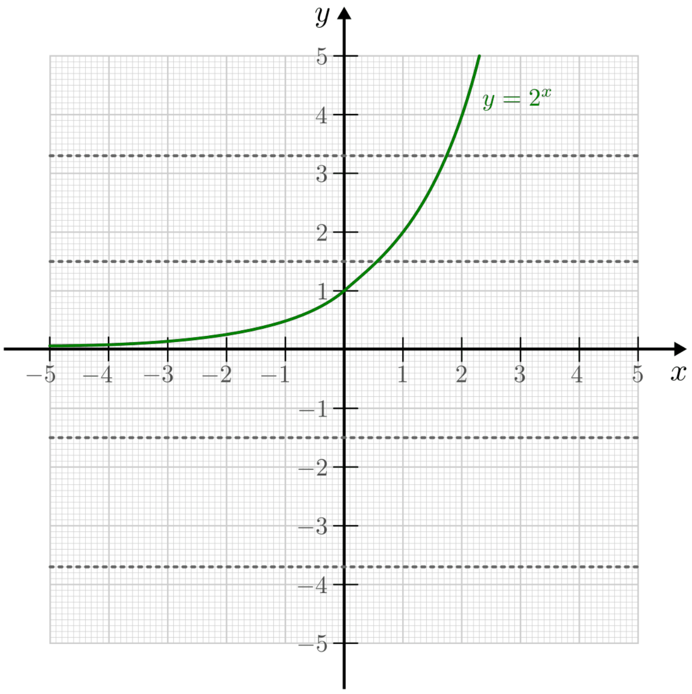


Abb. 98: Beispiel einer injektiven Funktion ($y = 2^x$).

Am Diagramm einer Funktion lässt sich diese Eigenschaft daran erkennen, dass jede beliebige, zur x-Achse parallele Gerade den Funktionsgraph im gesamten Wertebereich höchstens einmal schneidet.

Beispiel:

> Die Funktion $f(x) = 2^x$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und der Wertemenge $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ ist injektiv. Der Funktionsgraph wird von jeder zur x-Achse parallelen Geraden im positiven Wertebereich ($y > 0$) genau einmal, im negativen Wertebereich ($y < 0$) überhaupt nicht geschnitten.

- Eine Funktion heißt bijektiv, wenn jedes Element ihrer Wertemenge $\mathbb{W}$ *genau* einmal als Funktionswert auftritt, also jedes Element der Wertemenge genau einem Element der Definitionsmenge zugeordnet ist.[6]

Am Diagramm einer Funktion lässt sich diese Eigenschaft daran erkennen, dass jede beliebige, zur x-Achse parallele Gerade den Funktionsgraph im gesamten Wertebereich genau einmal schneidet.

Beispiel:

> Die Funktion $f(x) = x^3$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und der Wertemenge $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ ist bijektiv; der Funktionsgraph wird von jeder zur x-Achse parallelen Geraden im gesamten Wertebereich genau einmal geschnitten.

[6] Somit ist jede bijektive Funktion sowohl surjektiv als auch injektiv.

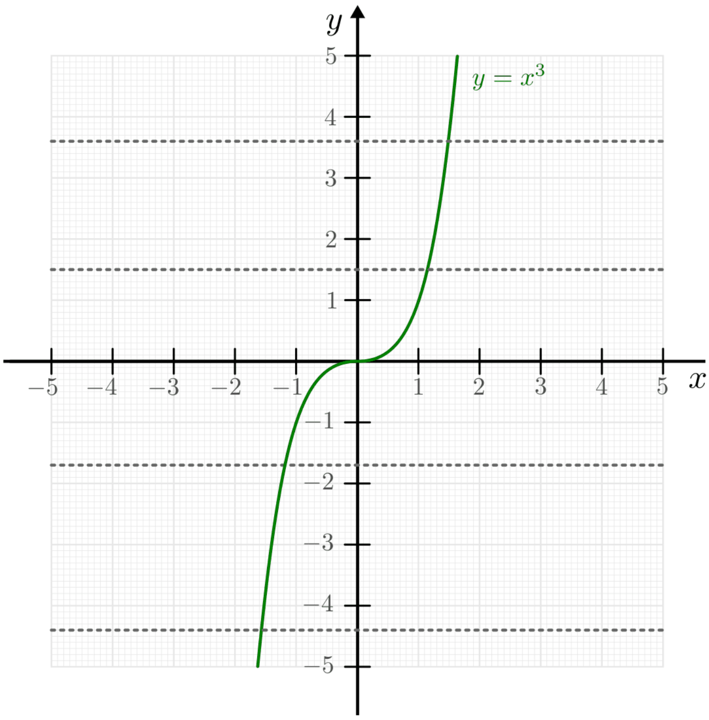


Abb. 99: Beispiel einer bijektiven Funktion ($y = x^3$).

Jede surjektive oder injektive Funktion kann durch eine geeignete Einschränkung der Definitionsmenge bzw. der Wertemenge zu einer entsprechenden bijektiven Funktion gemacht werden.[7]

Umkehrbarkeit einer Funktion

Eine Funktion ist eine mathematische Beschreibung dafür, welche "Ursache" x innerhalb eines Prozesses eine bestimmte Wirkung y hervorruft. Ein derartiger Zusammenhang ist nur dann sinnvoll, wenn die Zuweisung eines beliebigen Wertes der Ausgangsgröße x zu einem Ergebniswert $y = f(x)$ stets eindeutig ist, ein x-Wert also nicht zwei verschiedene y-Werte als Ergebnis liefern kann.

$$y = f(x)$$

Umgekehrt ist es jedoch möglich, dass verschiedene x-Werte den gleichen y-Wert als Ergebnis liefern.

Beispiele:

- Unterschiedliche Körper können eine gleich große Masse besitzen. Ein einzelner Körper hingegen besitzt stets nur einen einzigen, eindeutigen Wert für die Größe seiner Masse.

[7] Beispielsweise kann die (surjektive) Funktion $f(x) = \sin(x)$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = [-1;\ +1]$ durch eine Einschränkung des Definitionsbereichs auf $\mathbb{D} = [-\pi;\ +\pi]$ zu einer bijektiven Funktion gemacht werden.
Entsprechend kann die (injektive) Funktion $f(x) = 2^x$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ durch eine Einschränkung des Wertebereichs auf $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$ zu einer bijektiven Funktion gemacht werden.

- In einem Obstladen kostet eine bestimmte Sorte Äpfel (zu einem bestimmten Zeitpunkt) einen eindeutigen Preis je Menge. Unabhängig davon, wie viele Äpfel ein Kunde tatsächlich kauft, ist der zu zahlende Gesamtbetrag dadurch eindeutig festgelegt. Der gleiche Preis je Menge kann gleichzeitig allerdings auch für eine andere Obstsorte gelten.

Im Allgemeinen sind Funktionen somit nicht "umkehrbar", es lässt sich also nicht für jede Funktion eine Zuordnung finden, die jedem beliebigen y-Wert auf eindeutige Weise einen x-Wert zuweist. Eine Funktion besitzt diese Eigenschaft genau dann, wenn sie *bijektiv* ist. Ist eine Funktion nicht bijektiv, so muss sie zuerst durch Einschränkung ihrer Definitions- bzw. Wertemenge zu einer bijektiven Funktion gemacht werden.

Die Umkehrfunktion f_{U} einer Funktion f findet man, indem man die ursprüngliche Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auflöst und anschließend die Variablen x und y vertauscht.

Beispiel:

- Die Umkehrfunktion f_{U} der Funktion $f(x) = 2 \cdot x + 3$ lässt sich berechnen, indem zunächst die Funktionsgleichung nach x aufgelöst wird:

  $$y = 2 \cdot x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \cdot (y - 3)$$

  Multipliziert man in der rechten Gleichung die Klammer aus und vertauscht die Bezeichnungen der Variablen x und y, so folgt für die Umkehrfunktion f_{U}:

  $$y = \frac{1}{2} \cdot x - 1,5$$

Bildet man nach dem gleichen Prinzip erneut die Umkehrfunktion einer Umkehrfunktion, so erhält man wieder die ursprüngliche Funktion zurück.

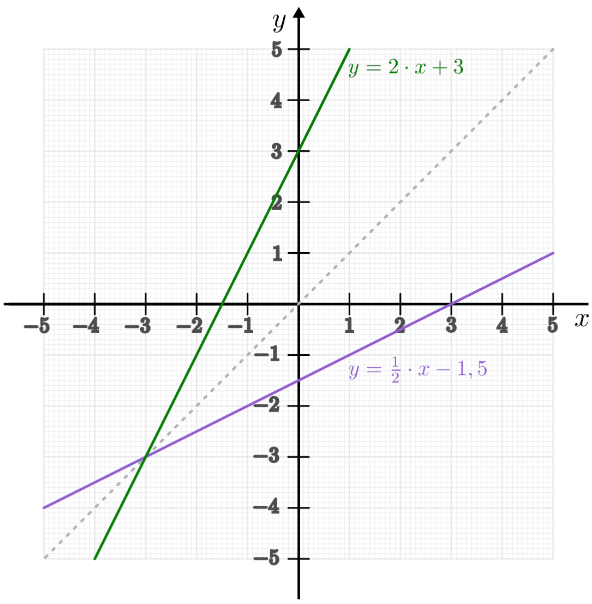


Abb. 100: Graph einer Funktion ($y = 2 \cdot x + 3$) und ihrer Umkehrfunktion ($y = \frac{1}{2} \cdot x - 1,5$).

Im gleichen Koordinatensystem werden eine Funktion $y = f(x)$ und ihre Umkehrfunktion $y = f_{\mathrm{U}}(y)$ durch einen gleichen Funktionsgraphen dargestellt, wenn lediglich die Benennung der x- und y-Achse (Argument- und Funktionswerte) ausgetauscht werden. Sollen die Bezeichnungen der x- und y-Achse hingegen bestehen bleiben, so sind die Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion stets achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.

Monotonie und Beschränktheit

Die Untersuchung einer Funktion auf Monotonie, Beschränktheit, Grenzwerte und Stetigkeit ermöglicht es im Bereich der Analysis, weiter reichende Aussagen über die Funktion, beispielsweise das Aussehen des Funktionsgraphen, zu treffen.

Monotonie

In gleicher Weise wie bei *Zahlenfolgen* stellt auch bei Funktionen die Monotonie eine wichtige charakteristische Eigenschaft einer Funktion dar.

Gilt für alle Elemente $x_1 < x_2$ aus dem Definitionsbereich einer Funktion auch $f(x_1) \le f(x_2)$, so heißt die Funktion monoton steigend. Entsprechend heißt eine Funktion monoton fallend, wenn für die Funktionswerte aller $x_1 < x_2$ die Bedingung $f(x_1) > f(x_2)$ gilt. Bei einer konstanten Funktion sind die Funktionswerte $f(x)$ für alle x konstant.

Es gilt somit für jede Funktion $f(x)$ und $x_1 < x_2$:

$$\begin{aligned} f(x_1) \le f(x_2) \quad & \text{für alle } n \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ ist monoton zunehmend.} \\ f(x_1) \ge f(x_2) \quad & \text{für alle } n \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ ist monoton abnehmend.} \\ f(x_1) = f(x_2) \quad & \text{für alle } n \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ ist konstant.} \end{aligned}$$

Gilt bei der obigen Unterscheidung anstelle der Kleiner-Gleich-Relation $\le$ die Kleiner-Relation $<$ bzw. anstelle der Größer-Gleich-Relation $\ge$ die Größer-Relation $>$, so nennt man die Funktion *streng* monoton ab- bzw. zunehmend. Jede streng monoton steigende Funktion ist bijektiv und somit umkehrbar; die Umkehrfunktion hat dabei die gleiche Monotonie wie die ursprüngliche Funktion.

Beschränktheit

Eine Funktion $f(x)$ wird beschränkt genannt, wenn es zwei reelle Zahlen s und S gibt, so dass alle Funktionswerte $y = f(x)$ zwischen beiden begrenzenden Zahlen liegen, wenn also gilt:

$$s \le f(x) \le S \quad \text{für alle } x \in \mathbb{D}$$

Hierbei wird s als untere Schranke und S als obere Schranke der Funktion bezeichnet.

Eine Funktion kann in einem bestimmten Bereich auch nur einseitig eine untere oder eine obere Schranke aufweisen. Beispielsweise gilt für alle Werte der Funktion $f(x) =$

$-x^4 + 2 \cdot x^2 + 3$ die Ungleichung $f(x) \le 4$, so dass jede Zahl ≥ 4 eine obere Schranke der Funktion darstellt. Es lässt sich jedoch keine untere Schranke für die gleiche Funktion definieren, da sie im negativen Bereich betraglich unendlich große Werte annimmt.

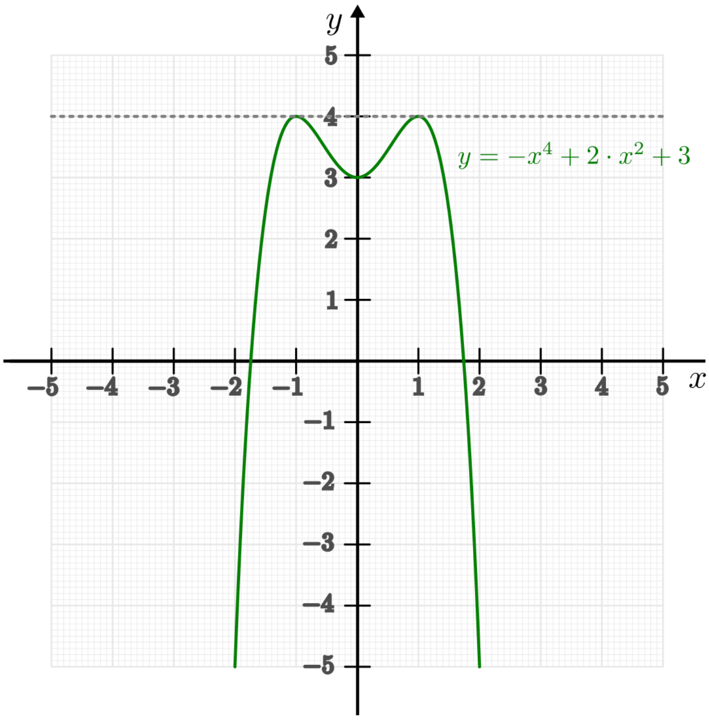


Abb. 101: Beispiel einer einseitig beschränkten Funktion ($y = -x^4 + 2 \cdot x^2 + 3$).

Hat eine Funktion in einem bestimmten Bereich weder eine obere noch eine untere Schranke, so heißt die Funktion in diesem Bereich unbeschränkt.

Grenzwerte einer Funktion

Die Werte einer Funktion können sich – abhängig vom Funktionstyp – ebenso wie die Werte einer Zahlenfolge mit zunehmenden x-Werten einem bestimmten Zahlenwert annähern. Eine Funktion besitzt genau dann einen solchen Grenzwert, wenn sie *monoton* und *beschränkt* ist.

Grenzwerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$

Grenzwerte von Funktionen werden ebenfalls in sehr ähnlicher Weise wie Grenzwerte von *Folgen* definiert. Während jedoch der "Definitionsbereich" von Folgen auf die natürlichen Zahlen beschränkt ist und somit nur *ein* Grenzwert für $x \to \infty$ existieren kann, können die x-Werte von Funktionen sowohl im positiven wie auch im negativen Zahlenbereich unendlich groß werden; es lässt sich daher ein Grenzwert sowohl für $x \to \infty$ wie auch für $x \to -\infty$ definieren.

Ein Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \infty$ existiert genau dann, wenn sich für immer größere x-Werte die zugehörigen y-Werte immer mehr an einen bestimmten Wert g annähern. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle x-Werte ab einer gewissen Zahl x_0 das *Konvergenzkriterium* erfüllt ist, also die Differenz von $f(x) - g$ beliebig klein wird. Für jeden noch so kleinen Wert ε muss also gelten:

$$|f(x) - g| < \varepsilon \; \text{ für alle } \; x > x_0 \quad \Leftrightarrow \quad g \text{ ist Grenzwert von } f(x) \tag{81}$$

Anschaulich besagt diese Bedingung, dass man sich einen beliebig dünnen "Schlauch" (eine so genannte ε-Umgebung) um den Grenzwert a herum denken kann und dann alle Funktionswerte ab einem bestimmten x-Wert innerhalb dieser Umgebung liegen müssen.[8]

Existiert ein Grenzwert g einer Funktion für beliebig große negative beziehungsweise positive x-Werte, so schreibt man:

$$\begin{aligned} \text{Grenzwert für unendlich große, negative } x\text{-Werte}: \lim_{x \to -\infty} f(x) = g_1 \\ \text{Grenzwert für unendlich große, positive } x\text{-Werte}: \lim_{x \to +\infty} f(x) = g_2 \end{aligned} \tag{82}$$

Existiert für eine Funktion $f(x)$ einer der beiden obigen Grenzwerte, so nennt man die Funktion "konvergent" für $x \rightarrow -\infty$ beziehungsweise $x \rightarrow +\infty$. Ebenso ist es möglich, dass eine Funktion keinen Grenzwert für $x \rightarrow \pm\infty$ besitzt; in diesem Fall nennt man sie divergent.

Beispiele:

- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ (eine so genannte "Hyperbelfunktion") ist für $x \rightarrow \infty$ konvergent zum Grenzwert Null. Für $x \rightarrow -\infty$ ist der Grenzwert ebenfalls gleich Null. Es gilt also:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

- Die Funktion $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ist für $x \rightarrow \pm\infty$ konvergent zum Grenzwert 1. Es gilt also:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right) = 1$$

- Die Funktion $f(x) = x^2$ (eine "Parabel") ist divergent, sie hat keinen Grenzwert.

Werden die Funktionswerte einer divergierenden Funktion mit zunehmenden x-Werten unendlich groß, so bezeichnet man ∞ als "uneigentlichen" Grenzwert – tatsächlich existiert in diesem Fall keine bestimmte Zahl g als obere Schranke, wie sie für einen Grenzwert eigentlich existieren muss.

[8] Ebenso kann man für jede monotone Zahlenfolge x_n aus den Werten des Definitionsbereichs die Folge der zugehörigen Funktionswerte betrachten. Hat eine Funktion beispielsweise für $x \rightarrow \infty$ den Grenzwert g, so hat auch jede frei wählbare Folge x_n die Folge $f_n(x_n)$ der zugehörigen Funktionswerte den gleichen Grenzwert g.

Grenzwert für $x \to x_0$

Grenzwerte von Funktionen können nicht nur für unendlich große negative bzw. positive x-Werte betrachtet werden; es ist ebenso möglich zu prüfen, ob ein Grenzwert existiert, wenn sich die x-Werte einem frei wählbaren Wert x_0 annähern. Existiert ein solcher Grenzwert g, so schreibt man:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \tag{83}$$

Ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 definiert, so ist ihr Grenzwert an dieser Stelle gleich ihrem Funktionswert, es gilt also $f(x_0) = g$ für $x_0 \in \mathbb{D}$. Der obige Grenzwert kann allerdings auch dann existieren, wenn die Funktion an der Stelle x_0 nicht definiert ist. Vor allem an den Grenzen des Definitionsbereichs $\mathbb{D}$ (beispielsweise an Definitionslücken) werden Funktionen deshalb häufig auf mögliche Grenzwerte untersucht.

Sofern möglich, nähert man dazu die x-Werte der Stelle x_0 sowohl von links als auch von rechts an; man untersucht also das Verhalten der Funktion an den Stellen $x_0 - \delta$ und $x_0 + \delta$, wobei δ eine möglichst kleine Zahl ist. Man bildet also folgende Grenzwerte:

$$g_- = \lim_{\substack{x \to (x_0 - h), \\ h \to 0}} \big(f(x) \big)$$

$$g_+ = \lim_{\substack{x \to (x_0 + h), \\ h \to 0}} \big(f(x) \big)$$

Entsprechend bezeichnet man die beiden zugehörigen Grenzwerte g_- und g_+ als "linksseitig" bzw. "rechtsseitig".

Rechenregeln für Grenzwerte

Für das Rechnen mit Grenzwerten gibt es folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \lim \big(f_1(x) \pm f_2(x) \big) &= \lim \big(f_1(x) \big) \pm \lim \big(f_2(x) \big) \\ \lim \big(f_1(x) \cdot f_2(x) \big) &= \lim \big(f_1(x) \big) \cdot \lim \big(f_2(x) \big) \\ \lim \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) &= \frac{\lim \big(f_1(x) \big)}{\lim \big(f_2(x) \big)} \end{aligned} \tag{84}$$

Bei der Division zweier Funktionen bzw. Grenzwerte muss dabei darauf geachtet werden, dass nicht durch Null dividiert wird, d.h. es muss $f_2(x) \neq 0$ für alle x sowie $\lim \big(f_2(x) \big) \neq 0$ gelten. Ist im Speziellen $f(x) = 1$ und $g(x)$ eine Funktion mit dem Grenzwert ∞ für $x \to \infty$, so gilt:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Gilt zudem für drei Funktionen $f_1(x) < f_2(x) < f_3(x)$ und sind die Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} \big(f_1(x) \big) = \lim_{x \to x_0} \big(f_2(x) \big) = g$ der kleinsten und größten Funktion identisch, so gilt dies auch für den Grenzwert der "mittleren" Funktion.

Stetigkeit

Man bezeichnet eine Funktion an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ als stetig, wenn an dieser Stelle der linksseitige Grenzwert g_-, der rechtsseitige Grenzwert g_+ und der Funktionswert $g = f(x_0)$ übereinstimmen. Eine Funktion wird (global) stetig genannt, wenn die Stetigkeitsbedingung für alle x-Werte des Definitionsbereichs erfüllt ist.

Anschaulich bedeutet Stetigkeit, dass der Graph einer Funktion keine "Sprünge" macht, d.h. entlang des Definitionsbereichs als eine durchgezogene Linie (ohne Absetzen des Schreibstifts) gezeichnet werden kann. Dies ist bei sehr vielen Funktionen der Fall, beispielsweise bei allen ganzrationalen Funktionen, der Sinus- bzw. Cosinusfunktion. Auch die Tangens- und Hyperbelfunktion $f(x) = \frac{1}{x}$ sind stetig, da sich ihre Funktionswerte nur an den jeweils nicht definierten Stellen (Definitionslücken) sprunghaft ändern. Auch die Kombination zweier oder mehrerer stetiger Funktionen mittels den Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division ungleich Null ergibt wieder eine stetige Funktion.

Ein anschauliches Beispiel für eine lokal, aber nicht global stetige Funktion ist die so genannte Signum-Funktion (auch Vorzeichenfunktion genannt). Sie ist abschnittsweise folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls} \quad x < 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ +1 & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}$$

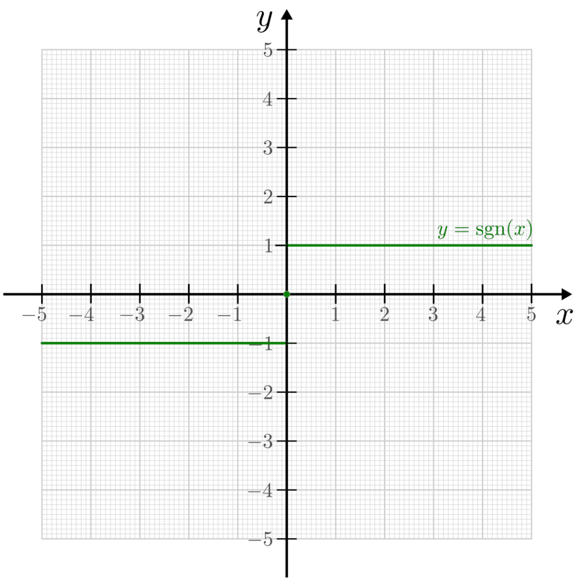


Abb. 102: Funktionsgraph der Signumsfunktion $y = \operatorname{sgn}(x)$.

Die Signum-Funktion ist an allen Stellen bis auf $x_0 = 0$ (lokal) stetig. An dieser Stelle jedoch stimmen ihr linksseitiger Grenzwert $g_- = -1$, ihr Funktionswert $f(0) = 0$ und ihr rechtsseitiger Grenzwert $g_+ = 1$ nicht überein.

Zwischenwertsatz und Extremwertsatz

Ist eine Funktion f in einem Intervall stetig, so ist sie dort auch begrenzt. Es existieren also eine untere Schranke s und eine obere Schranke S, so dass $s \le f(x) \le S$ für alle x-Werte des Intervalls gilt.

Ist eine Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $[a\,;\,b]$ stetig, so gilt der so genannte Extremwertsatz: In diesem Fall lassen sich stets zwei Funktionswerte m und M finden, so dass $m \le f(x) \le M$ gilt. Der Wert m wird dabei als Minimum, der Wert M als Maximum der Funktion f im Intervall $[a\,;\,b]$ bezeichnet.

Eine in einem abgeschlossenen Intervall $[a\,;\,b]$ stetige Funktion f nimmt zudem jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an. Diese insbesondere für die numerische Berechnung von Nullstellen wichtige Tatsache wird "Zwischenwertsatz" genannt.

Nullstellen

Als eine Nullstelle wird ein Ausgangswert x_0 einer Funktion bezeichnet, für den der zugehörige Funktionswert $y = f(x_0)$ den Wert Null annimmt:

$$f(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 \text{ ist eine Nullstelle}$$

Die Nullstellen einer Funktion lassen sich bestimmen, indem man in die implizite oder explizite Darstellung der Funktion für y den Wert Null einsetzt und die sich ergebende Gleichung mit algebraischen Methoden nach x auflöst. Je nach Art der Funktion ist es möglich, dass diese mehrere, eine oder auch keine Nullstelle besitzt.

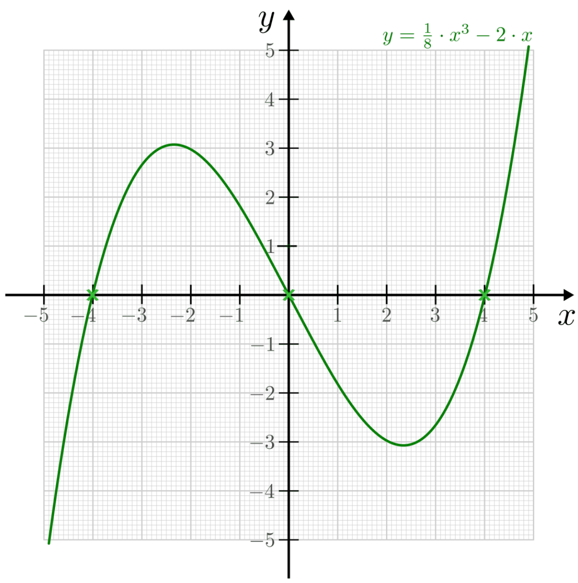


Abb. 103: Funktionsgraph mit drei Nullstellen.

Zeichnet man eine Funktion als Graph in einem Koordinatensystem ein, so stellen Nullstellen Schnitt- oder Berührungspunkte mit der x-Achse dar.

Schnittpunkte zweier Funktionen

Eng verbunden mit der Bestimmung von Nullstellen ist die Bestimmung von Schnittstellen zweier oder mehrerer Funktionen. Betrachtet man zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, so kann man prüfen, für welche x-Werte aus dem gemeinsamen Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2$ die Werte der Funktionen übereinstimmen, d.h. für welche Ausgangswerte x_0, x_1, usw. die Bedingung $f_1(x) = f_2(x)$ gilt. Das Lösen dieser Gleichung stimmt formal mit der Bestimmung der Nullstelle von $f_1(x) - f2(x)$ überein:

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) - f_2(x) = 0$$

Existieren ein oder mehrere Schnittpunkte, so sind an den entsprechenden Stellen die Funktionswerte von f_1 und f_2 üblicherweise nicht gleich Null. Man erhält die zugehörigen y-Werte der Schnittpunkte, indem man die beim Lösen der obigen Gleichung gefundenen x-Werte in eine der beiden Funktionen einsetzt.

Verknüpfung und Verkettung von Funktionen

Aus den elementaren Funktionen, die in den nächsten Abschnitten näher beschrieben werden, lassen sich weitere Funktionen zusammensetzen. Dies ist auf zweierlei Arten möglich:

- Bei einer so genannten Verknüpfung werden zwei Funktionen durch eine der vier Grundrechenarten miteinander verbunden. Das Ergebnis einer so zusammengesetzten Funktion erhält man, indem man zunächst die Werte der beiden Funktionen berechnet und diese dann mit der entsprechenden Grundrechenart verknüpft. Schrittweise lassen sich so auch mehrere Funktionen miteinander verknüpfen, wobei auf die Auswertungsreihenfolge der Verknüpfungen (Multiplikation bzw. Division vor Addition bzw. Subtraktion) zu achten ist.

  Allgemein hat eine verknüpfte Funktion somit folgende Form:

  $$\begin{aligned} y &= f_1(x) + f_2(x) \quad \text{mit} \quad \mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2 \quad \text{oder} \\ y &= f_1(x) \;\cdot\; f_2(x) \quad \text{mit} \quad \mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2 \end{aligned} \tag{85}$$

  Einfache Sonderfälle von Gleichung (85) ergeben sich hierbei, wenn eine der beiden Funktionen konstant ist. Hierbei entstehen folgende Funktionen:

  $$y = f(x) + c \quad \text{und/oder} \quad y = c \cdot f(x) \tag{86}$$

  Im ersten Fall wird zu jedem Funktionswert die Konstante c addiert (beziehungsweise subtrahiert, wenn $c < 0$ ist). Bei einer graphischen Darstellung wird der Funktionsgraph dadurch um c Einheiten in vertikaler Richtung verschoben (nach oben für $c > 0$, nach unten für $c < 0$).

  Im zweiten Fall wird der Funktionswert mit einer Konstanten c multipliziert. Dadurch wird der Funktionsgraph im Fall $|c| < 1$ vertikal gestaucht, im Fall $|c| > 1$ vertikal gestreckt. Ist $c < 0$, so wird der Funktionsgraph (wie bei einer *zentrischen Streckung*) an der x-Achse gespiegelt.

- Bei einer so genannten Verkettung werden zwei Funktionen "hintereinander" ausgeführt, d.h. der Funktionswert der ersten Funktion wird als Ausgangswert der zweiten Funktion verwendet. Dies ist im Allgemeinen nur dann möglich, wenn der Wertebereich der ersten Funktion eine Teilmenge des Definitionsbereichs der zweiten Funktion ist.

  Allgemein hat eine verkettete Funktion somit folgende Form:

  $$y = f_2\big(f_1(x)\big) \quad \text{mit } \mathbb{D} = \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{D}_2 \tag{87}$$

  Dabei wird f_2 als äußere und f_1 als innere Funktion bezeichnet. Ähnlich wie bei der Auswertung von Termen in Klammern wird zunächst der Wert der inneren Funktion f_1 berechnet, und dieser anschließend, sofern erlaubt, als Argument für die äußere Funktion f_2 eingesetzt.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Elementare Funktionen

Grundlegende Funktionen, die in unterschiedlichen Zusammenhängen in der Mathematik immer wieder auftauchen, werden "elementare Funktionen" genannt. Hierfür gibt es zwar keine klaren Kriterien, doch üblicherweise sind damit die folgenden Funktionen gemeint:

Potenz- und Wurzelfunktionen

Eine Potenzfunktion hat allgemein folgende Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^n \tag{88}$$

In praktischen Anwendungen treten Potenzfunktionen sehr häufig auf; beispielsweise werden durch sie Proportionalitäten zwischen einer Größe y und der n-ten Potenz der Ausgangsgröße x beschrieben. Wichtige Sonderfälle sind hierbei mit $f(x) = x^0 = 1$ die konstante Funktion und mit $f(x) = x$ die lineare Funktion. Wurzelfunktionen lassen sich ebenfalls als Potenzfunktion mit rationalem Exponenten auffassen.

Einige wichtige Eigenschaften von Potenzfunktionen werden im Folgenden näher beschrieben.

Gerade und ungerade Potenzfunktionen

Potenzfunktionen auch höheren Grades – also allgemein Funktionen der Form $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ – lassen sich in gerade und ungerade Funktionen unterteilen.

Potenzfunktionen mit geraden Exponenten

Eine Funktion heißt "gerade", wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ folgende Bedingung gilt:

$$f(-x) = f(x) \tag{89}$$

Zu jedem Punkt des Funktionsgraphen existiert in diesem Fall ein zweiter Kurvenpunkt, der achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Diese Bedingung wird von allen Potenzfunktionen mit geradzahligen Exponenten erfüllt, da sich bei diesen die Minuszeichen der negativen x-Werte beim Potenzieren gegenseitig aufheben. Die konstante Funktion $f(x) = c$ wird ebenfalls zu den geraden Funktionen gezählt, da $x^0 = 1$ ist.

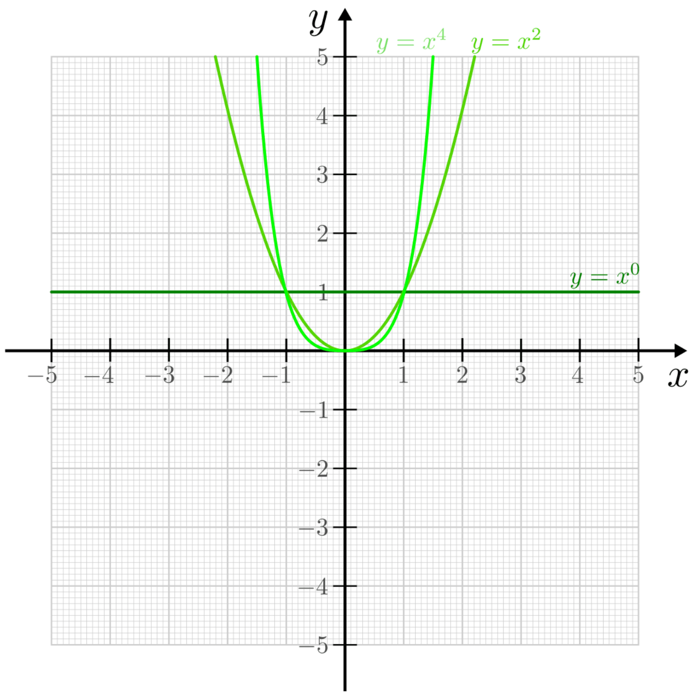


Abb. 104: Beispiele von Potenzfunktionen mit geraden Exponenten.

Zusätzlich haben alle geraden Potenzfunktionen folgende Eigenschaften:

- Die Funktionsgraphen verlaufen stets durch die Punkte $(-1, 1)$, $(0, 0)$ und $(1, 1)$.
- Die Funktionen sind streng monoton fallend für $x < 0$ und streng monoton steigend für $x > 0$.[1]
- Der Definitionsbereich der Funktionen ist $\mathbb{R}$, ihr Wertebereich $\mathbb{R}_0^+$; sie sind also nach unten beschränkt, und für die untere Schranke gilt $s = 0$.

[1] Steht eine Potenzfunktion in Betragszeichen, ist also $f(x) = |x^n|$, so ist diese Funktion in jedem Fall gerade, da mögliche negative Vorzeichen von Funktionswerten dadurch aufgehoben werden (siehe beispielsweise Abbildung *Betragsfunktion*).

Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten

Eine Funktion heißt “ungerade”, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ folgende Bedingung gilt:

$$-f(-x) = f(x) \tag{90}$$

Zu jedem Punkt des Funktionsgraphen existiert somit ein zweiter Kurvenpunkt, der punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung $(0,0)$ ist. Diese Bedingung wird von allen Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten erfüllt, da sich die Funktionswerte von negativen x-Werte gegenüber den Funktionswerten von betragsgleichen positiven x-Werten nur im Vorzeichen unterscheiden.[2]

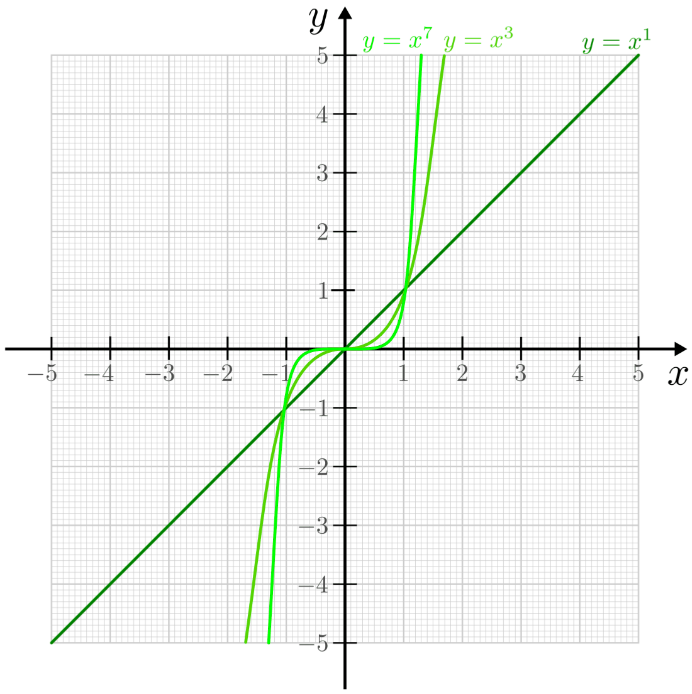


Abb. 105: Beispiele von Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten.

Zusätzlich haben alle ungeraden Potenzfunktionen folgende Eigenschaften:

- Der Funktionsgraph verläuft stets durch die Punkte $(-1,-1)$, $(0,0)$ und $(1,1)$.
- Die Funktion ist für alle x-Werte entweder streng monoton fallend oder streng monoton steigend.
- Der Definitionsbereich sowie der Wertebereich der Funktion ist $\mathbb{R}$.

Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen haben allgemein folgende Funktionsgleichung:

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \tag{91}$$

[2] Um die Umkehrfunktion einer geraden Potenzfunktion zu bilden, muss somit der Definitionsbereich eingeschränkt werden (meist auf $\mathbb{R}_0^+$).

Dabei ist der Wurzelexponent n eine feste natürliche und die Variable x eine beliebige positive reelle Zahl.[3] Da die Wurzel einer beliebigen positiven Zahl ebenfalls eine positive Zahl ist, ist $\mathbb{W} = \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$. Aufgrund der Beziehung $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ lassen sich Wurzelfunktionen als Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten auffassen. Zugleich ist die n-te Wurzelfunktion $y = \sqrt[n]{x}$ die Umkehrfunktion der n-ten Potenzfunktion $y = x^n$, da gilt:

$$x = f_{\mathrm{U}}(y) = \sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

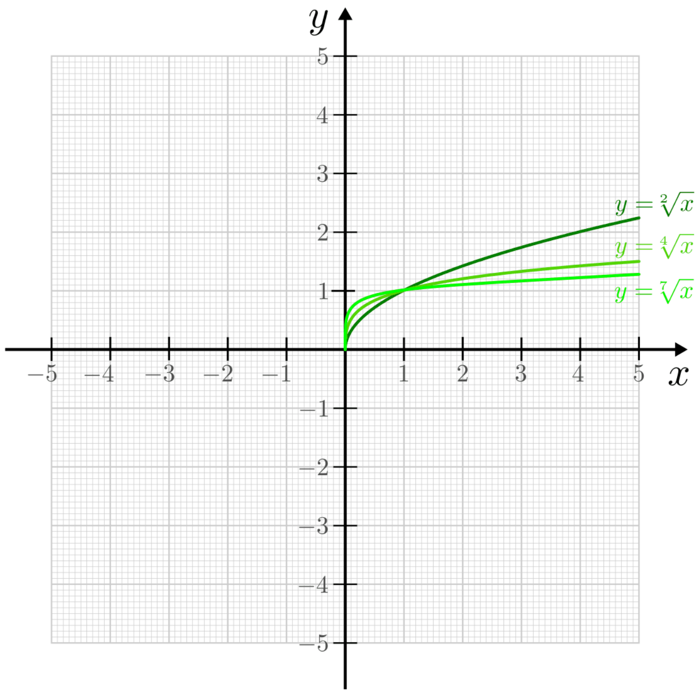


Abb. 106: Beispiele von Wurzelfunktionen.

Alle Wurzelfunktionen sind stetig, streng monoton steigend und haben $x_0 = 0$ als (einfache) Nullstelle. Die Funktionsgraphen haben neben dem Punkt $(0, 0)$ auch den Punkt $(1, 1)$ gemeinsam; sie entstehen durch Spiegelung der jeweiligen Potenzfunktion x^n an der Geraden $y = x$.

Ganz- und gebrochenrationale Funktionen

3

Diese Einschränkung ist zumindest für reellwertige Funktionen notwendig, da in diesem Fall keine Wurzeln mit negativen Argumenten definiert sind.
Im Bereich der *komplexen Zahlen* gilt die Beziehung $\sqrt{-1} = i$.

Ganzrationale Funktionen

Ganzrationale Funktionen haben allgemein folgende Funktionsgleichung:

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_{\mathrm{n}} \cdot x^n + a_{\mathrm{n-1}} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \tag{92}$$

Hierbei bezeichnet man den größten Exponenten $n \in \mathbb{N}$ des Polynoms als "Grad" der Funktion, die reellen Zahlen a_0 bis a_n nennt man Koeffizienten. Ganzrationale Funktionen haben allgemein folgende Eigenschaften:

1. Ganzrationale Funktionen sind für alle reellen Zahlen definiert, es gilt also $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Sie sind im gesamten Bereich stetig, d.h. der Funktionsgraph ergibt eine kontinuierliche Kurve ohne Sprünge.

2. Jede Potenzfunktion x^n mit $n \geq 1$ wird für große x-Werte unendlich groß, da $\lim_{x->\infty} x^n = \infty$ ist. Bei einer ganzrationalen Funktion richtet sich der Grenzwert nach der höchsten Potenz und hat das gleiche Vorzeichen wie der dazugehörige Koeffizient.

3. Jede ganzrationale Funktion n-ten Grades hat maximal n verschiedene Nullstellen.

   Ebenso ist es möglich, dass bei der Bestimmung der Nullstellen ein Wert mehrfach vorkommt. In diesem Fall ist die Nullstelle mehrfach zu zählen, wobei der Vielfachheit folgende Bedeutung zukommt:

   - Bei geradzahlig-mehrfachen Nullstellen berührt der Funktionsgraph die x-Achse, verbleibt allerdings auf der selben Seite der Achse.

   - Bei ungeradzahlig-mehrfachen Nullstellen schneidet der Funktionsgraph die x-Achse.

Aus Potenzfunktionen zusammengesetzte Funktionen sind meist weder gerade noch ungerade, außer sie bestehen ausschließlich aus nur geraden oder nur ungeraden Potenzfunktionen. Sowohl gerade als auch ungerade Funktionen haben besondere Stellen x_i (Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte), sofern $x_i \neq 0$ ist, stets paarweise. Die x-Werte der besonderen Stellen unterscheiden sich dabei nur in ihrem Vorzeichen, es ist also $x_1 = -x_2$. Zudem haben sie folgende Eigenschaften:

- Ganzrationale Funktionen geraden Grades sind stets einseitig beschränkte Funktionen. Sie haben entweder keine oder eine gerade Anzahl an Nullstellen, die unter Umständen mehrfach zu zählen sind.

- Ganzrationale Funktionen ungeraden Grades sind stets unbeschränkt und haben stets (mindestens) eine Nullstelle. Die Gesamtzahl der Nullstellen ist stets ungerade.

Im Folgenden werden die obigen und weitere Eigenschaften am Beispiel der häufig vorkommenden linearen und quadratischen Funktionen, also den einfachsten Vertretern von ganzrationalen Funktionen (mit $n = 1$ beziehungsweise $n = 2$), näher beschrieben.

Lineare Funktionen

Wenn eine Größe in gleichem Maß zunimmt wie auch eine andere Größe wächst, so nennt man den Zusammenhang direkt proportional oder linear. Die zugehörige mathematische Funktion hat folgende Form:

$$y = a \cdot x + b$$

Lineare Zusammenhänge zweier Größen treten im Alltag – beispielsweise bei *Dreisatz-Aufgaben* – sowie in den Naturwissenschaften sehr häufig auf.

Beispiele:

- Je größer die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs ist, desto länger ist die Wegstrecke, die es in einer bestimmten Zeit zurücklegt.
- Je mehr Plätzchen auf Vorrat gebacken werden, desto länger kann man davon naschen (vorausgesetzt, jeden Tag werden gleich viele Plätzchen verspeist).
- Je mehr Geld man ausgeben möchte, desto mehr muss man verdienen. Oder: Je sparsamer man mit einer bestimmten Menge Geld umgeht, desto länger kann man davon leben. Ähnlich ist es mit dem Benzinverbrauch eines Fahrzeugs.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade, die umso steiler verläuft, je größer der Proportionalitätsfaktor a ist; a wird daher auch aus "Steigung" der linearen Funktion bezeichnet. Der Wert b stellt den Anfangswert dar (das Ergebnis der Funktion, wenn $x = 0$ ist).

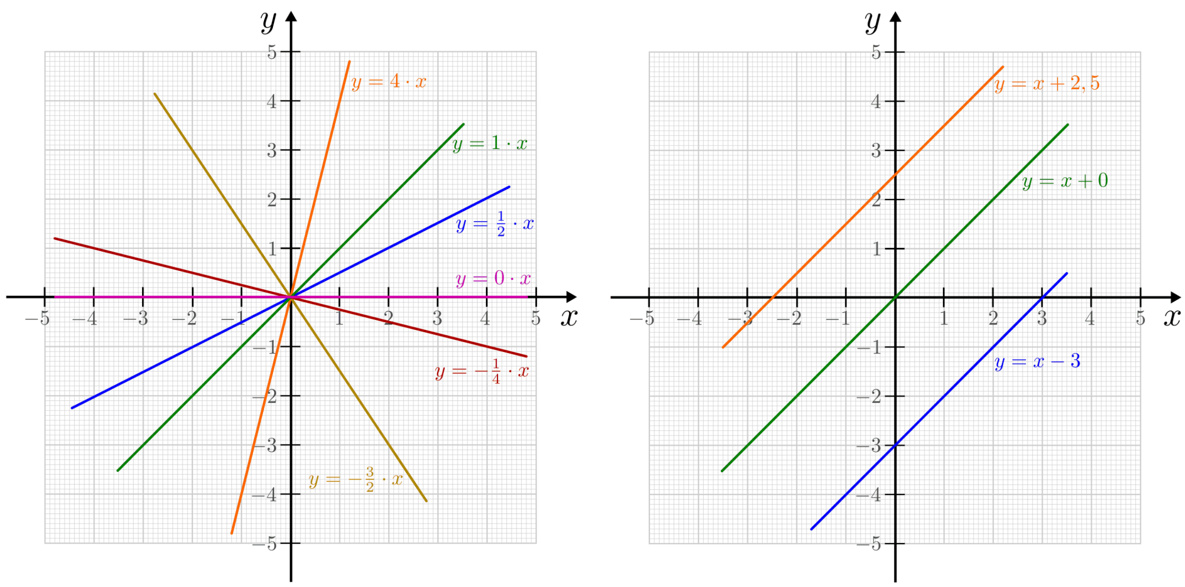


Abb. 107: Graphen der linearen Funktionen $y = a \cdot x$ bzw. $y = x + b$ mit unterschiedlichen Parametern a (links) und b (rechts).

Eine Funktion heißt proportional, wenn das Verhältnis der Größen $\frac{y}{x}$ immer einen konstanten Wert hat, d.h. wenn $\frac{y}{x} = k$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn $y = k \cdot x$ ist. Bei proportionalen Funktionen handelt es sich folglich um lineare Funktionen, die üblicherweise durch den Koordinatenursprung verlaufen und eine positive Steigung aufweisen.

Quadratische Funktionen

In manchen Situationen wächst eine Größe durch den Einfluss einer anderen Größe stärker als proportional. Nimmt eine Messgröße um das $2, 4, 9, 16, n^2$-fache zu, während die Ausgangsgröße den $1, 2, 3, 4, n$-fachen Wert annimmt, so nennt man die zugehörige Funktion quadratisch.

Beispiele:

- Ein Quadrat mit einer $2, 3, 4, \ldots$-fachen Seitenlänge l besitzt einen $4, 9, 16, \ldots$-fachen Flächeninhalt A_{Quadrat}.

$$A_{\text{Quadrat}} = l^2$$

- Die Fläche A_{Kreis} eines Kreises wächst ebenfalls quadratisch mit zunehmendem Radius an. Zur exakten Berechnung muss der Radius r quadriert und mit der Kreiszahl π multipliziert werden.

$$A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot r^2$$

- Die Strecke, die ein Körper im freien Fall (ohne Reibung) zurücklegt, nimmt quadratisch mit der Zeit zu: Nach einer Sekunde hat der Körper knapp 5 Meter zurückgelegt, nach zwei Sekunden 20 Meter, nach drei Sekunden 45 Meter, nach vier Sekunden 80 Meter, usw. Allgemein gilt für die Fallstrecke s mit der Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ folgende Formel:

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel bzw. ein Stück davon.

Die Normalparabel

Allgemein besitzt eine quadratische Funktion folgende Form:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \qquad (93)$$

Im einfachsten Fall sind die beiden Parameter $b, c = 0$ sowie $a = 1$. Die Funktion vereinfacht sich damit zu:

$$y = x^2 \qquad (94)$$

Den zu Gleichung (94) gehörigen Funktionsgraphen nennt man Normalparabel. Ihre Funktionswerte ergeben sich jeweils durch Quadrieren der eingesetzten x-Werte.

Die Besonderheiten einer Normalparabel sind:

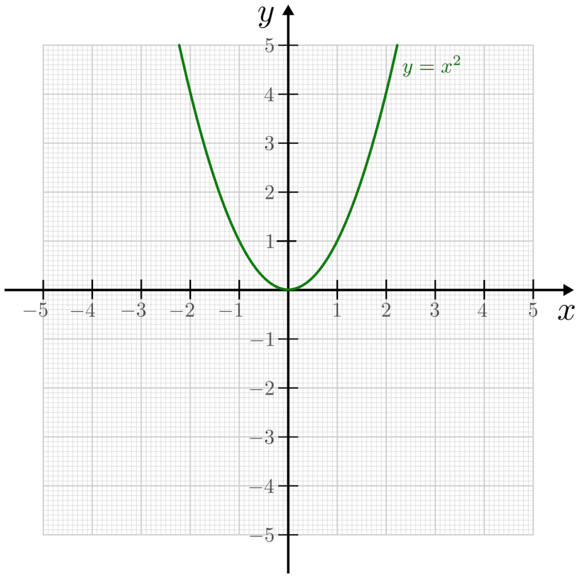


Abb. 108: Graph der Normalparabel $y = x^2$.

- Der Scheitel der Normalparabel liegt bei $(0;0)$.
- Die Normalparabel ist symmetrisch zur y-Achse. Der Grund hierfür ist, dass sich das Minuszeichen beim Quadrieren aufhebt – Minus mal Minus ergibt Plus.
- Die Normalparabel besitzt nur nicht-negative y-Werte, d.h. sie bildet den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ auf den positiven Bereich der reellen Zahlen $W = \mathbb{R}^+$ ab. Der Grund hierfür ist, dass für die Quadratzahl einer jeden reellen Zahl $n \in \mathbb{R}$ gilt: $n^2 \ge 0$

Bedeutung der Parameter a, b und c

Durch Variation der Parameterwerte a, b und c ergeben sich gegenüber der Normalparabel folgende Veränderungen:

- Ist der Parameter $0 < a < 1$, so ist die Parabel gegenüber der Normalparabel gestaucht, d.h. ihre Werte wachsen langsamer als es bei der Normalparabel der Fall ist. Im umgekehrten Fall $a > 0$ ist die resultierende Parabel gegenüber der Normalparabel gestreckt.

  Gilt $a < 0$, so ist die Parabel nach unten hin geöffnet.
- Lässt sich eine Parabelgleichung als binomische Formel schreiben, beispielsweise $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ oder allgemein $(x \pm b)^2$, so bewirkt der in der quadrierten Klammer stehende Parameter b eine Verschiebung nach links (falls $b > 0$) bzw. nach rechts (falls $b < 0$).

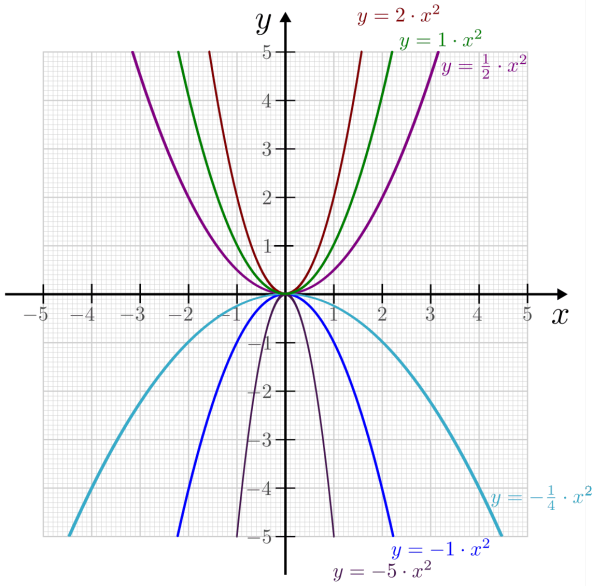


Abb. 109: Graphen der Parabelgleichung $y = a \cdot x^2$ für verschiedene Parameter a.

Die Wirkung des Parameters $b \cdot x$ lässt sich bestimmen, indem man mit Hilfe der ersten Ableitung den Wert des Parabelscheitels allgemein berechnet.[1] Je nach Größe der Werte von a und c bewirkt der Parameter b eine Verschiebung des Parabelscheitels um $-\frac{b}{2 \cdot a}$ in horizontaler und um $-\frac{b^2}{4 \cdot a} + c$ in vertikaler Richtung. Im Falle einer Normalparabel ($a = 1$ und $c = 0$) bewirkt $b \cdot x$ eine Verschiebung um $-\frac{b}{2}$ in x-Richtung sowie eine Verschiebung um $-\frac{b^2}{4}$ in y-Richtung.

[1] Für die erste Ableitung der Parabelgleichung (93) gilt:

$$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$$

Der Parabelscheitel ist die einzige Stelle einer Parabel, an der ihre Steigung $f'(x)$ gleich Null ist (Extremwert). Der x-Wert des Scheitelpunktes lässt sich somit bestimmen, wenn in dieser Gleichung $f'(x) = 0$ gesetzt wird:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot a \cdot x + b = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2 \cdot a}$$

Den zugehörigen y-Wert des Parabelscheitels erhält man, wenn man $x_{\mathrm{S}} = -\frac{b}{2 \cdot a}$ in die ursprüngliche Parabelgleichung (93) einsetzt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
y_{\mathrm{S}} = f\left(-\frac{b}{2 \cdot a}\right) &= a \cdot \left(-\frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2 \cdot a}\right) + c \\
&= a \cdot \frac{b^2}{4 \cdot a^2} - \frac{b^2}{2 \cdot a} + c \\
&= \frac{b^2}{4 \cdot a} - \frac{2 \cdot b^2}{4 \cdot a} + c \\
&= -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c
\end{aligned}$$

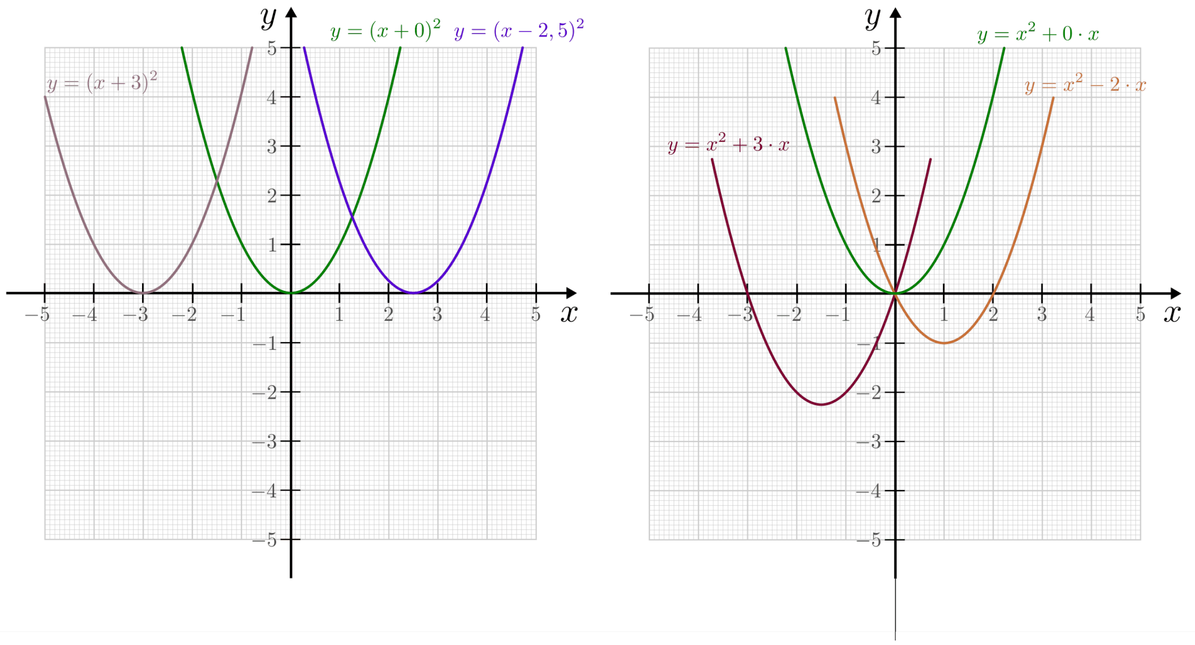


Abb. 110: Graphen der Parabelgleichung $y = (x+b)^2$ bzw. $y = x^2 + b \cdot x$ für verschiedene Parameter b.

- Ist der Parameter $c \neq 0$, so ist die Parabel nach oben $(c > 0)$ bzw. nach unten $(c < 0)$ verschoben.

Treten mehrere der oben genannten Fälle ein, so kombinieren sich entsprechend die Effekte.

Gebrochenrationale Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen haben allgemein folgende Funktionsgleichung:

$$y = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot x^k} = \frac{a_\mathrm{n} \cdot x^n + a_{\mathrm{n}-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{b_\mathrm{m} \cdot x^m + b_{\mathrm{m}-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + a_0} \tag{95}$$

Gebrochenrationale Funktionen bestehen also aus einem Zählerpolynom $Z(x)$ mit Grad n und einem Nennerpolynom $N(x)$ mit Grad m. Ist $n < m$, so nennt man die Funktion "echt" gebrochenrational; andernfalls lässt sich die Funktion mittels *Polynomdivision* als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion schreiben.

Nullstellen und Polstellen

Gebrochenrationale Funktionen sollten stets auf folgende Punkte hin untersucht werden:

- Als Nullstellen von gebrochenrationalen Funktionen werden alle x-Werte bezeichnet, für die der Zählerterm $Z(x)$ gleich Null wird, ohne dass der Nennerterm $N(x)$ ebenfalls gleich Null wird.

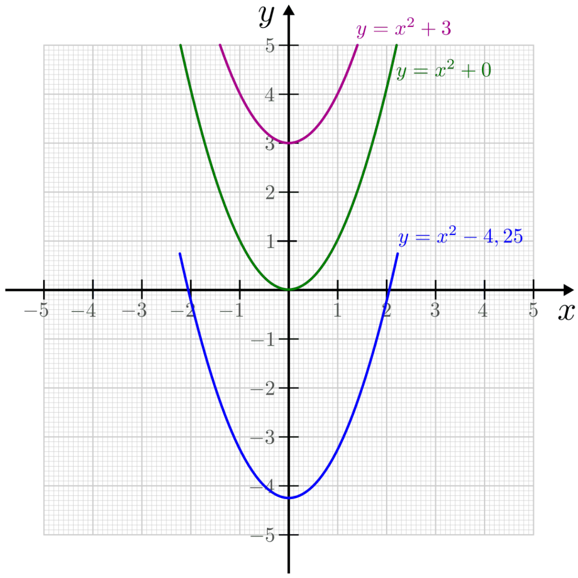


Abb. 111: Graphen der Parabelgleichung $y = x^2 + c$ für verschiedene Parameter c.

- Als Polstellen von gebrochenrationalen Funktionen werden alle x-Werte bezeichnet, für die der Nennerterm $N(x)$ gleich Null wird, ohne dass der der Zählerterm $Z(x)$ ebenfalls gleich Null wird. Die Funktion ist (wegen der Division durch Null) an solchen Stellen nicht definiert. Der Graph der Funktion ist an Polstellen nicht stetig, sondern nähert sich asymptotisch einer durch entsprechenden x-Wert verlaufenden und zur y-Achse parallelen Geraden an.[2]

Beispiel:

- Die folgende Funktion soll auf Nullstellen und Polstellen hin untersucht werden:

$$y = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$$

Der Zählerterm ist nur für $x_0 = 0$ gleich Null, der Funktionsgraph hat somit nur dort eine Nullstelle. Um die Polstelle(n) zu bestimmen, muss der Nennerterm gleich Null gesetzt werden:

$$(x+1) \cdot (x-2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \quad ; \quad x_2 = +2$$

[2] Als Asymptote bezeichnet man allgemein eine Gerade oder Kurve, an die sich eine Funktion an einer Polstelle oder im Unendlichen annähert.

Bei einer gebrochenrationalen Funktion erhält man für $x \to \pm\infty$ eine schräg verlaufende Gerade als Asymptote, wenn der Grad des Zählers um 1 größer ist als der Grad des Nenners. Ist der Grad des Zählers um ≥ 2 größer als der Grad des Nenners, so nähert sich die gebrochenrationale Funktion asymptotisch an eine schräge Kurve an. In beiden Fällen kann die Funktionsgleichung der Asymptote mittels einer *Polynomdivision* bestimmt werden.

Ist der Grad des Zählers gleich dem Grad des Nenners, so hat die gebrochenrationale Funktion für $x \to \pm\infty$ eine waagrechte Asymptote. Der y-Wert dieser Asymptote ist gleich dem Verhältnis der Koeffizienten der größten Potenzen des Zählers und des Nenners, beispielsweise $\frac{5}{4}$ bei $\frac{5 \cdot x^3 - x}{4 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}$. Ist der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners, so hat die gebrochenrationale Funktion für $x \to \pm\infty$ die waagrechte Asymptote $y = 0$.

Die Funktion hat also zwei Polstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$.

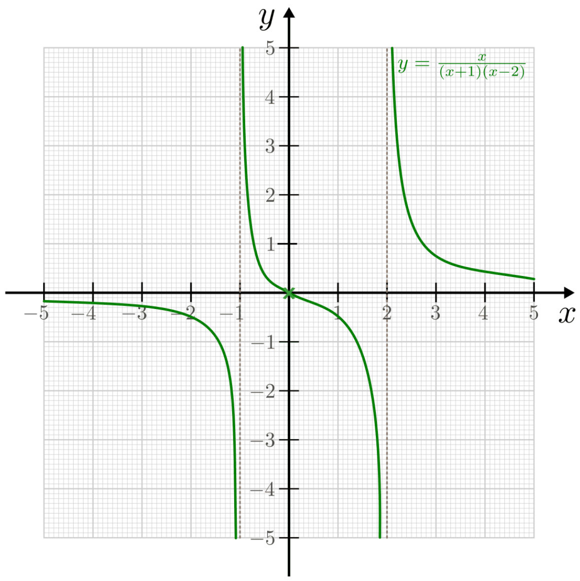


Abb. 112: Beispiel von Nullstellen und Polstellen einer gebrochenrationalen Funktion.

Werden sowohl der Zählerterm $Z(x)$ als auch der Nennerterm $N(x)$ für einen Wert x_i gleich Null, so ist die Funktion an dieser Stelle ebenfalls nicht definiert. Zähler und Nenner enthalten jedoch in diesem Fall einen gemeinsamen Faktor $(x - x_i)^k$, durch den der gebrochenrationale Term für $x \neq x_i$ gekürzt werden kann.

Hyperbeln

Funktionen der Form $\frac{1}{x^n}$ stellen die einfachsten gebrochenrationalen Funktionen dar; sie werden Hyperbeln genannt. Alle diese Funktionen haben bei $x_0 = 0$ eine Polstelle, die y-Achse ist also eine senkrechte Asymptote. Die zweite, waagrechte Asymptote der Funktion für $x \to \pm\infty$ ist die x-Achse.

Alle Hyperbeln haben, da der Zähler stets ungleich Null ist, keine Nullstellen. Zudem verlaufen die Funktionsgraphen aller Hyperbeln durch den Punkt $(1, 1)$. Aufgrund der Beziehung $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ lassen sich Hyperbelfunktionen als Potenzfunktionen mit negativen Exponenten auffassen. Damit können auch Hyperbeln in *gerade und ungerade Funktionen* unterteilt werden:

- Die Funktionsgraphen von Hyperbeln mit geraden Exponenten sind achsensymmetrisch zur y-Achse, sie verlaufen also im ersten und zweiten Quadranten und gehen zusätzlich durch den Punkt $(-1, 1)$. Im Bereich $x < 0$ sind gerade Hyperbeln streng monoton steigend, im Bereich $x > 0$ streng monoton fallend. Nach unten sind gerade Hyperbeln mit der unteren Schranke $s = 0$ beschränkt.
- Die Funktionsgraphen von Hyperbeln mit ungeraden Exponenten sind punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung $(0, 0)$, sie verlaufen also im ersten und dritten Quadranten und gehen zusätzlich durch den Punkt $(-1, -1)$. Im gesamten Definitionsbereich sind ungerade Hyperbeln streng monoton steigend.

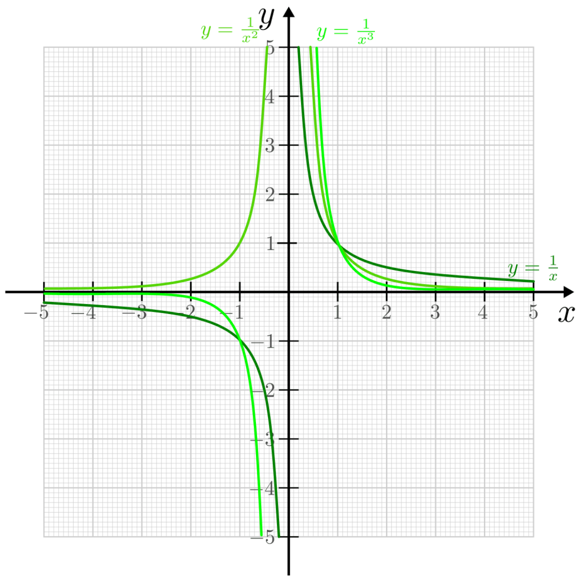


Abb. 113: Beispiele von Hyperbelfunktionen.

Aufgrund der Beziehung $y = \frac{c}{x} \;\Leftrightarrow\; x \cdot y = c$ können mit Hyperbeln *indirekte Proportionalitäten* zwischen x und y beschrieben werden.

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen haben allgemein folgende Funktionsgleichung:

$$y = a^x \tag{96}$$

Dabei bezeichnet die "Basis" $a > 0$ eine beliebige, konstante Zahl. Üblicherweise wird zudem der Fall $a = 1$ ausgeschlossen, da $1^x = 1$ eine konstante Funktion liefert. Am weitesten verbreitet sind die Exponentialfunktionen mit den Basen $a = 2$, $a = e$ und $a = 10$.[1]

Im Fall $0 < a < 1$ sind Exponentialfunktionen streng monoton fallend, im Fall $a > 1$ streng monoton steigend. Alle Exponentialfunktionen haben den Punkt $(0, 1)$ gemeinsam und nähern sich asymptotisch der x-Achse an, ohne diese jemals zu berühren. Exponentialfunktionen haben somit keine Nullstellen und $s = 0$ als untere Schranke. Die Funktionen $y = a^{-x}$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sind identisch; ihr gemeinsamer Funktionsgraph verläuft bezüglich der y-Achse symmetrisch zur Funktion $y = a^x$.[2]

[1] Dabei bezeichnet $e = 2,71828182845...$ die "Eulersche Zahl".

[2] Die Identität von $y = a^{-x}$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ergibt sich aus der Beziehung $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

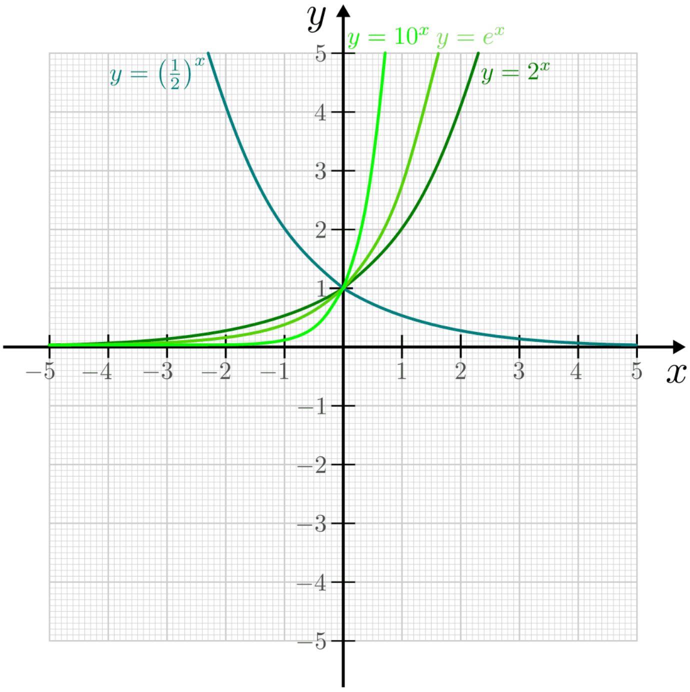


Abb. 114: Beispiele von Exponentialfunktionen.

Für Exponentialfunktionen sind die folgenden vier *Rechenregeln für Potenzen* von Bedeutung:

$$\begin{aligned} a^{x_1+x_2} &= a^{x_1} \cdot a^{x_2} \\ a^{x_1-x_2} &= a^{x_1} : a^{x_2} \\ a^{x_1 \cdot x_2} &= (a^{x_1})^{x_2} \\ a^{\frac{x_1}{x_2}} &= \sqrt[x_2]{a^{x_1}} \quad (\text{mit } x_2 \neq 0) \end{aligned} \tag{97}$$

Eine besondere Bedeutung von Exponentialfunktionen a^x mit $a > 1$ liegt darin, dass ihre Werte schneller wachsen als es bei einer Potenzfunktion x^n mit beliebig großem (aber festem) n der Fall ist; es gilt also für beliebige Werte $n \in \mathbb{R}^+$ und $a > 1$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty$$

Der Grund dafür liegt darin, dass die *Ableitung einer Exponentialfunktion* als Maß für die Steigung der jeweiligen Funktion selbst eine Exponentialfunktion ist: Nicht nur die Werte wachsen für $a > 1$ somit exponentiell an, sondern auch die Zunahme der Werte nimmt in diesem Fall exponentiell zu.

Logarithmusfunktionen

Logarithmusfunktionen sind die *Umkehrfunktionen* von Exponentialfunktionen. Sie haben allgemein folgende Funktionsgleichung:

$$y = \log_a(x) \tag{98}$$

Da Exponentialfunktionen eindeutig umkehrbar sind, gibt es zu jeder Exponentialfunktion eine entsprechende Logarithmusfunktion. Da der Definitionsbereich jeder Umkehrfunktion gleich dem Wertebereich der Originalfunktion ist, sind Logarithmen nur für $x > 0$ definiert.

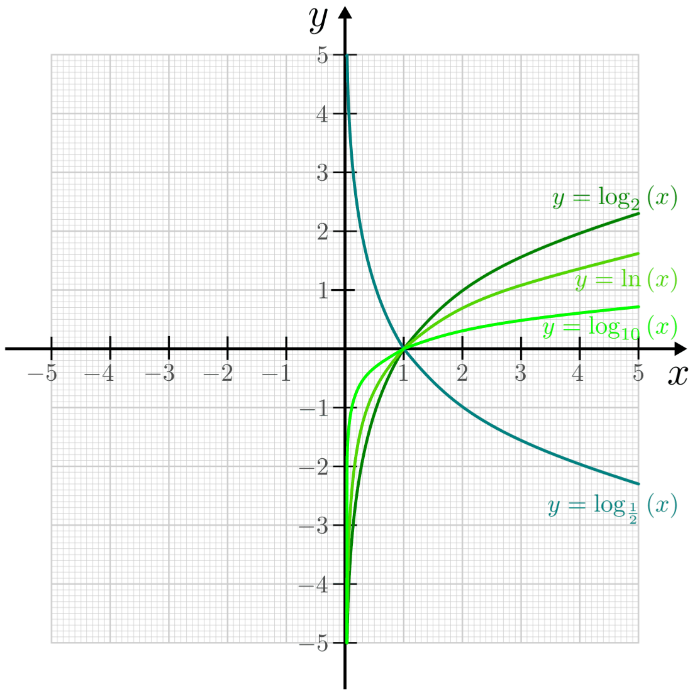


Abb. 115: Beispiele von Logarithmusfunktionen.

Logarithmusfunktionen sind nur für $a > 0$ und $a \neq 1$ definiert. Wie bei den Exponentialfunktionen, so sind auch bei den Logarithmusfunktionen die Basen $a = 2$, $a = e$ und $a = 10$ am weitesten verbreitet; sie werden, wie bereits im Abschnitt *Rechenregeln für Logarithmen* beschrieben, als binärer, natürlicher und dekadischer Logarithmus bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mathrm{lb}\,(x) = \log_2(x) &: \text{ dualer Logarithmus} \\ \ln(x) = \log_e(x) &: \text{ natürlicher Logarithmus} \\ \lg(x) = \log_{10}(x) &: \text{ dekadischer Logarithmus} \end{aligned}$$

Im Fall $0 < a < 1$ sind Logarithmusfunktionen streng monoton fallend, im Fall $a > 1$ streng monoton steigend. Die einzelnen Logarithmusfunktionen können jeweils durch einen Basiswechsel in einen Logarithmus mit einer anderen Basis umgeformt werden. Es gilt dabei:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \tag{99}$$

Alle Logarithmusfunktionen sind unbeschränkt, haben den Punkt $(0,1)$ als einzige Nullstelle gemeinsam und nähern sich für $x \to 0$ asymptotisch der y-Achse an. Die Funktionen $y = \log_{\frac{1}{a}}(x)$ und $y = -\log_a(x)$ sind identisch; ihr gemeinsamer Funktionsgraph verläuft bezüglich der x-Achse symmetrisch zur Funktion $y = \log_a(x)$.[3]

[3] Die Identität von $y = \log_{\frac{1}{a}}(x)$ und $y = -\log_a(x)$ lässt sich mit Hilfe der folgenden beiden Beziehungen zeigen:

Für Logarithmusfunktionen sind die folgenden Rechenregeln von Bedeutung:

$$\begin{aligned}
\log_a(x_1 \cdot x_2) &= \log_a(x_1) + \log_a(x_2) \\
\log_a(x_1 : x_2) &= \log_a(x_1) - \log_a(x_2) \\
\log_a(x_1)^{x_2} &= x_2 \cdot \log_a(x_1) \\
\log_a(\sqrt[x_2]{x_1}) &= \frac{1}{x_2} \cdot \log_a(x_1) \qquad (\text{mit } x_1,\, x_2 \neq 0)
\end{aligned} \tag{100}$$

Eine besondere Bedeutung von Logarithmusfunktionen $\log_a(x)$ mit $a > 1$ liegt darin, dass ihre Werte langsamer wachsen als es bei einer Potenz- bzw. Wurzelfunktion x^n mit beliebig kleinem (aber festem) n der Fall ist; es gilt also für beliebige Werte $n \in \mathbb{R}^+$ und $a > 1$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a(x)}{x^n} = 0$$

Der Grund dafür liegt darin, dass die *Ableitung einer Logarithmusfunktion* als Maß für die Steigung der jeweiligen Funktion sehr schnell gegen Null geht; beispielsweise ist für $x = 1\,000\,000$ der Wert der Wurzelfunktion $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ gleich $(1\,000\,000)^{\frac{1}{2}} = 1\,000$, der Wert der Logarithmusfunktion $\log_2(x)$ beträgt für diesen Wert hingegen nur $\log_2(1\,000\,000) \approx 19,93$. Dennoch ist der Grenzwert für $x \to \infty$ bei jeder Logarithmus-Funktion $f(x) = \log_a(x)$ mit $a > 1$ ebenfalls Unendlich.

Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen, auch "Winkelfunktionen" genannt, weisen jedem Winkel eine bestimmte Zahl zu, die das Längenverhältnis der entsprechenden Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck angibt.

Die Winkelfunktionen am Einheitskreis

Die beiden Winkelfunktionen Sinus und Cosinus lassen sich nicht nur als *Längenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck*, sondern auch als Streckenanteile interpretieren.

- Als Spezialfall der *Basisumrechnung* von Logarithmen gilt für beliebige erlaubte Zahlen a und b:

  $$\log_a(b) = \frac{\log_b(b)}{\log_b(a)} = \frac{1}{\log_b(a)}$$

  Hierbei wird die Identität $\log_b(b) = 1$ genutzt.

- Ein Quotient als Argument eines Logarithmus kann als *Differenz zweier Logarithmen* dargestellt werden. Somit gilt:

  $$\log_b\left(\frac{1}{a}\right) = \log_b(1) - \log_b(a) = 0 - \log_b(a) = -\log_b(a)$$

  Hierbei wird die Identität $\log_b(1) = 0$ genutzt.

Insgesamt gilt somit:

$$\log_{\frac{1}{a}}(b) = \frac{1}{\log_b\left(\frac{1}{a}\right)} = -\frac{1}{\log_b(a)} = -\log_a(b) \quad \checkmark$$

Zeichnet man in ein Koordinatensystem einen Kreis mit Radius eins um den Koordinatenursprung $\mathrm{O} = (0,0)$ und verbindet den Koordinatenursprung mit einem auf dem Kreis entlang wandernden Punkt P, so stellen Cosinus und Sinus die senkrechten Projektionen der Verbindungslinie auf die x- bzw. y-Achse dar. Der Tangens entspricht der Steigung, welche die Verbindungslinie $\overline{\mathrm{OP}}$ bei einem Winkel α hat.

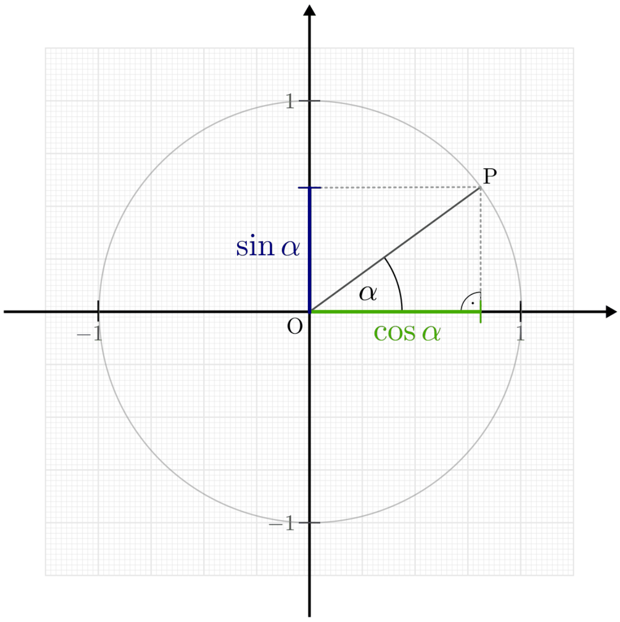


Abb. 116: Sinus und Cosinus am Einheitskreis. Die Verbindungslinie $\overline{\mathrm{OP}}$ besitzt die Länge eins, so dass $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ den Längen des x- bzw. y-Anteils von $\overline{\mathrm{OP}}$ entsprechen.

Der entscheidende Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass der Winkel hierbei beliebig große Werte annehmen kann: Gilt für den Winkel $\alpha > 360°$, so wiederholen sich auch die entsprechenden Werte von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$ mit einer Periode von $360°$ von neuem.[1]

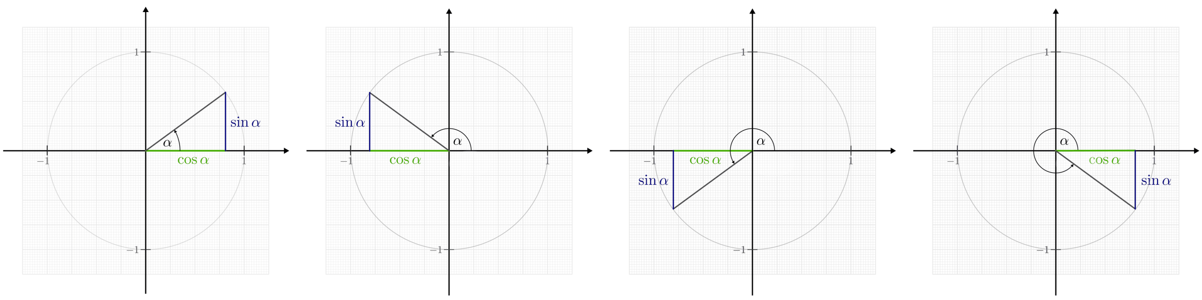


Abb. 117: Vorzeichen von Sinus und Cosinus in den verschiedenen Quadranten.

Damit sich die Winkelfunktionen in einem üblichen Koordinatensystem darstellen lassen, wird der Winkel als Argument meist nicht im Gradmaß, sondern im *Bogenmaß* angegeben. Damit kann, da sich die trigonometrischen Funktionen für beliebig große Winkelwerte

[1] Unter einer periodischen Funktion versteht man allgemein eine Funktion, für die $f(x+p) = f(x)$ gilt; dabei wird p als Periode der Funktion bezeichnet.

gelten, kann beispielsweise auch $\sin(x)$ anstelle von $\sin(\alpha)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ geschrieben werden. Die Vorzeichen der Winkelfunktionen wiederum richten sich danach, in welchem Quadranten des Koordinatensystems sich der "Kreisvektor" OP gerade befindet.

Anhand des Einheitskreises lässt sich auch der so genannte "trigonometrische Pythagoras" ableiten; Mit der Hypothenusenlänge $\mathrm{OP} = 1$ und den Kathetenlängen $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ lautet der *Satz des Pythagoras* hierbei:

$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1^2$$

Gewöhnlich wird $\sin^2(\alpha)$ anstelle von $(\sin(\alpha))^2$ und $\cos^2(\alpha)$ anstelle von $(\cos(\alpha))^2$ geschrieben. Für beliebige Winkelwerte α bzw. x ergibt sich damit die folgende wichtige Beziehung:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad (101)$$

Eigenschaften und Funktionsgraphen der Winkelfunktionen

Für einige besondere Winkel α lassen sich die Werte der Winkelfunktionen als (verhältnismäßig) einfache Bruch- bzw. Wurzelzahlen angeben – für die übrigen Winkelmaße ergeben $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ Werte mit unendlich vielen Nachkommastellen, die sich periodisch stets zwischen -1 und $+1$ bewegen. Die Werte von $\tan\alpha$ als dem Verhältnis von $\sin\alpha$ zu $\cos\alpha$ reichen von $-\infty$ bis $+\infty$ und sind nicht definiert, wenn $\cos\alpha = 0$ gilt.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	-1	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$	0	n.d.

Die Werte der Winkelfunktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ lassen sich auch als (wellenartige) Funktionsgraphen darstellen.

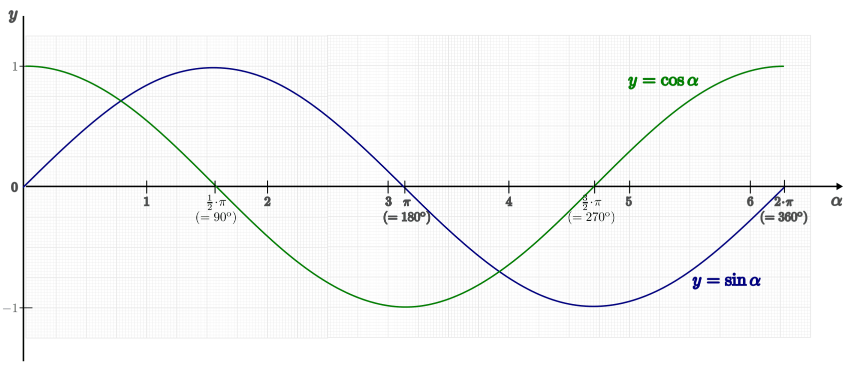


Abb. 118: Die Funktionsgraphen von Sinus und Cosinus für die erste Periode ($0 < \alpha < 360°$).

Die beiden Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ nehmen regelmäßig wiederkehrend die gleichen Werte aus dem Wertebereich $\mathbb{W} = [-1; 1]$ an. Sie werden daher als "periodisch" bezeichnet, mit einer Periodenlänge von $2 \cdot \pi$. Es gilt damit für jede natürliche Zahl n:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm 2 \cdot \pi) &= \sin(x) \\ \cos(x \pm 2 \cdot \pi) &= \cos(x) \end{aligned} \tag{102}$$

Führt man die Funktionsgraphen der Sinus- und Cosinusfunktion für negative x-Werte fort, so kann man erkennen, dass es sich bei der Sinusfunktion um eine ungerade (punktsymmetrische) Funktion und bei der Cosinusfunktion um eine gerade (achsensymmetrische) Funktion handelt. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= -\sin(-x) \\ \cos(x) &= \cos(-x) \end{aligned} \tag{103}$$

Zudem kann man den Funktionsgraphen der Cosinus-Funktion erhalten, indem man den Funktionsgraphen der Sinus-Funktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links (in negative x-Richtung) verschiebt; entsprechend ergibt sich die Sinus-Funktion aus einer Verschiebung der Cosinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts. Es gilt somit unter Berücksichtigung der Symmetrie der Cosinus-Funktion:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(+x - \frac{\pi}{2}) \\ \cos(x) &= \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{104}$$

Da die Funktionswerte der Sinus- und Cosinusfunktion periodisch sind, sind auch ihre Nullstellen periodisch. Sie lassen sich mit einer beliebigen natürlichen Zahl n in folgender Form angeben:

$$\begin{aligned} \sin(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = n \cdot \pi \\ \cos(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{105}$$

Die Tangensfunktion

Für die Tangens-Funktion $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ergeben sich Vorzeichenwechsel an den Definitionslücken (den Stellen, an denen $\cos\alpha = 0$ gilt). Je nachdem, von welcher Seite aus man sich diesen "Polstellen" nähert, nehmen die Funktionswerte des Tangens – entsprechend der Vorzeichen von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ – unendlich große negative bzw. positive Werte an.

Die Nullstellen $n \cdot \pi$ der Tangensfunktion sind mit denen der Sinusfunktion identisch, die Polstellen entsprechen den Nullstellen $(2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ der Cosinusfunktion.

Additionstheoreme

Bisweilen treten in mathematischen und technischen Aufgaben Sinus- und Cosinusfunktionen auf, deren Argument eine Summe zweier Winkel ist. Oft ist es dabei hilfreich, diese

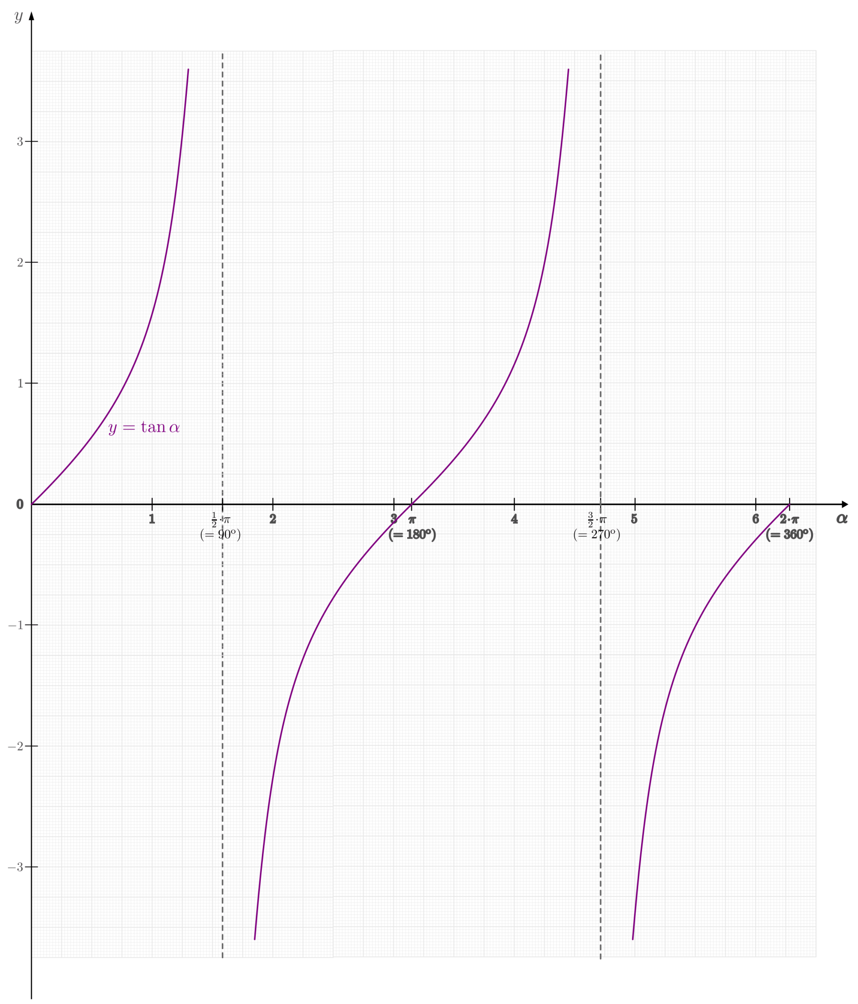


Abb. 119: Der Funktionsgraph des Tangens für $0 < \alpha < 360°$.

als Verknüpfung mehrerer Sinus- bzw. Cosinusfunktionen mit nur einem Winkel als Argument angeben zu können. Die folgenden Rechenregeln, die eine derartige Umrechnung ermöglichen, werden üblicherweise als "Additionstheoreme" bezeichnet.

Für beliebige Winkelwerte x_1 und x_2 gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x_1 + x_2) &= \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) + \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ \cos(x_1 + x_2) &= \cos(x_1) \cdot \cos(x_2) - \sin(x_1) \cdot \sin(x_2) \end{aligned} \tag{106}$$

Ist $x_2 < 0$, so gilt wegen Gleichung (103):

$$\begin{aligned} \sin(x_1 - x_2) &= \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) - \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ \cos(x_1 - x_2) &= \cos(x_1) \cdot \cos(x_2) + \sin(x_1) \cdot \sin(x_2) \end{aligned}$$

Ist $x_1 = x_2$, so gelten folgende Rechenregeln für "doppelte" Winkelwerte:

$$\begin{aligned} \sin(2 \cdot x) &= 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \cos(2 \cdot x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2 \cdot \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2(x) \end{aligned} \tag{107}$$

Umgekehrt lassen sich Sinus und Cosinus auch umformen, indem man in den obigen Gleichungen x durch $\frac{x}{2}$ ersetzt. Es gilt dabei:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ \cos(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned} \tag{108}$$

Zudem gibt es (eher zum Nachschlagen) auch zwei Formeln, mit denen Summen oder Differenzen von gleichartigen Winkelfunktionen in Produkte verwandelt werden können, was insbesondere bei der Vereinfachung von Brüchen hilfreich sein kann:

$$\begin{aligned} \sin(x_1) + \sin(x_2) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) \\ \sin(x_1) - \sin(x_2) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) \end{aligned} \tag{109}$$

Schließlich gibt es noch zwei Additionsregeln für die Summe bzw. die Differenz von Winkelargumenten bei Tangensfunktionen:

$$\begin{aligned} \tan(x_1 + x_2) &= \frac{\tan(x_1) + \tan(x_2)}{1 - \tan(x_1) \cdot \tan(x_2)} \\ \tan(x_1 - x_2) &= \frac{\tan(x_1) - \tan(x_2)}{1 + \tan(x_1) \cdot \tan(x_2)} \end{aligned} \tag{110}$$

Die Arcus-Funktionen

Die Arcus-Funktionen $\text{asin}(x)$, $\text{acos}(x)$ und $\text{atan}(x)$ geben zu einem gegebenen Wert x den zugehörigen Winkel α an; sie sind damit die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$. Beispielsweise ist $\text{asin}(x)$ der Winkel im Einheitskreis, dessen Sinus gleich x ist.

Da die Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktionen aufgrund ihrer Periodizität nicht *bijektiv* sind, muss ihr Definitionsbereich bei der Bildung der jeweiligen Umkehrfunktion eingeschränkt werden. Die Arcus-Funktionen werden dabei üblicherweise mit folgenden Definitionsbereichen festgelegt:

- Die Umkehrfunktion zu $y = \sin(x)$ mit $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ist die Funktion $y = \text{asin}(x)$ mit $x \in [1; 1]$.

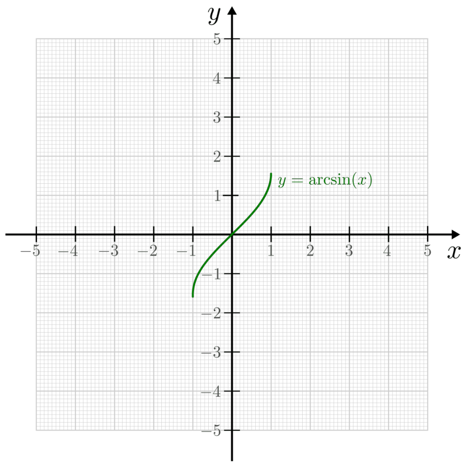


Abb. 120: Funktionsgraph der Arcus-Sinus-Funktion.

- Die Umkehrfunktion zu $y = \cos(x)$ mit $x \in [\ \ 0; \pi]$ ist die Funktion $y = \text{acos}(x)$ mit $x \in [1; 1]$.

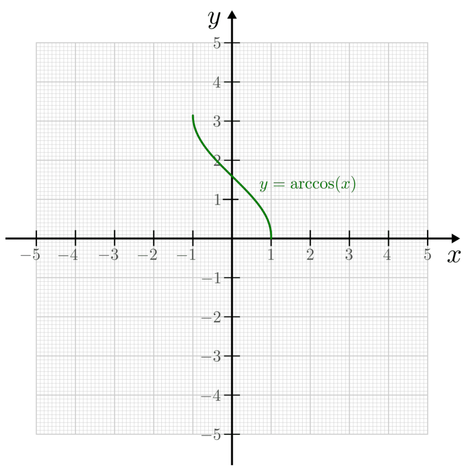


Abb. 121: Funktionsgraph der Arcus-Cosinus-Funktion.

- Die Umkehrfunktion zu $y = \tan(x)$ mit $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ist die Funktion $y = \text{atan}(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

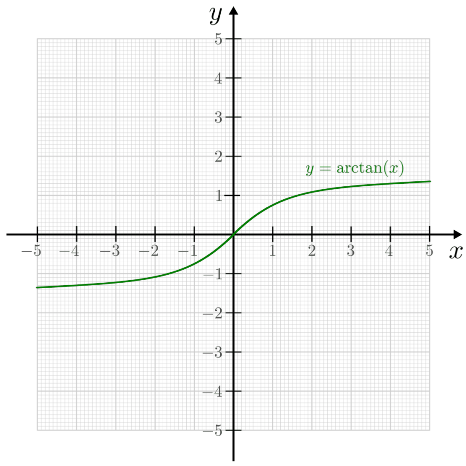


Abb. 122: Funktionsgraph der Arcus-Tangens-Funktion.

Die Wertebereiche der Arcus-Funktionen stimmen dabei mit den obigen Definitionsbereichen der ursprünglichen Winkelfunktionen überein.

Differentialrechnung

In zahlreichen Fällen, insbesondere bei der Kurvendiskussion, möchte man wissen, welche Steigung bzw. Krümmung der Graph einer Funktion an einer bestimmten Stelle besitzt. Aufschluss hierüber bietet die so genannte Differentialrechnung.

Differenzen und Differentiale

Das Steigungsdreieck

Um die Bedeutung der Steigung einer Funktion zu verstehen, wird zunächst die Steigung einer Geraden betrachtet. Ein anschauliches Beispiel bietet eine Holzleiste oder ein Lineal, das schräg auf einer geraden Unterlage aufgestellt wird.

Umso schneller die Höhe h entlang der horizontalen Wegstrecke l zunimmt, d.h. umso steiler das Lineal aufgestellt ist, desto größer ist die Steigung.

Ein solches "Steigungsdreieck" kann in einem gewöhnlichen Koordinatensystem an jede Gerade angelegt werden. Wandert man von einem (frei wählbaren) Punkt auf der Geraden beispielsweise fünf Kästchen horizontal nach rechts und zählt dann die Anzahl an Kästchen, die man horizontal nach oben oder unten zurücklegen muss um wieder auf die Gerade zu treffen, so hat man ein Maß für die Steigung der Gerade gewonnen.

Beispiele:

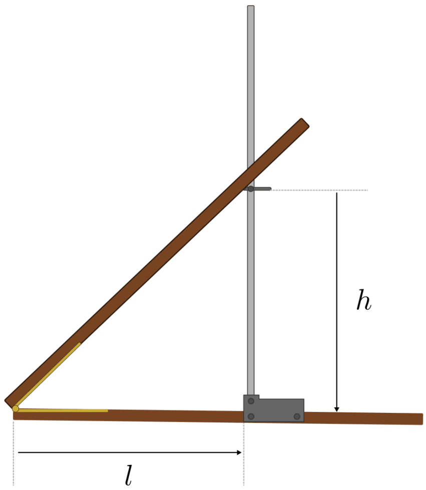


Abb. 123: Modell eines Steigungsdreiecks. Durch Messen der Höhe h und Länge l kann die Steigung einer schrägen Holzleiste bestimmt werden.

- Eine Gerade, die entlang einer horizontalen Strecke von fünf Kästchen nach rechts um drei Kästchen nach oben ansteigt, ist weniger steil als eine Gerade, die entlang der gleichen horizontalen Strecke (fünf Kästchen) um sieben Kästchen nach oben steigt.
- Eine Gerade, die entlang einer horizontalen Strecke von drei Kästchen nach rechts um vier Kästchen nach oben ansteigt, ist steiler als eine Gerade, die entlang der gleichen horizontalen Strecke (drei Kästchen) um zwei Kästchen nach oben steigt.
- Eine Gerade, die entlang einer horizontalen Strecke von vier Kästchen nach rechts um acht Kästchen nach oben ansteigt, ist genauso steil wie eine Gerade, die entlang einer horizontalen Strecke von sechs Kästchen um zwölf Kästchen nach oben steigt.

Mathematisch kann das Verhältnis zwischen der vertikalen Änderung $\Delta y = y_2 - y_1$ und der horizontalen Änderung $\Delta x = x_2 - x_1$ als Bruch geschrieben werden:

$$\text{Steigung} \;=\; \frac{\text{Vertikale Änderung}}{\text{Horizontale Änderung}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{111}$$

Da die beiden Änderungsgrößen Δy und Δx die gleiche Einheit (z.B. Kästchen oder cm) besitzen, besitzt die Steigung keine Einheit.

- Der Wert der Steigung ist positiv, wenn mit zunehmenden x-Werten die zugehörigen y-Werte größer werden.
- Die Steigung ist gleich Null, wenn mit zunehmenden x-Werten die zugehörigen y-Werte unverändert (konstant) bleiben.
- Eine negative Steigung bedeutet entsprechend, dass mit zunehmenden x-Werten die zugehörigen y-Werte kleiner werden.

Die Steigung kann auch in Prozent angegeben werden. Eine Steigung von 100% bedeutet beispielsweise, dass die Gerade mit jedem Kästchen nach rechts um genau ein

Abb. 124: Das Verkehrszeichen weist auf einen Berg mit einer (durchschnittlichen) Steigung von 12 Prozent hin.

Kästchen nach oben steigt. Da jedes Steigungsdreiecks rechtwinklig ist, kann für beliebige Steigungen kann der Steigungswinkel α mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ berechnet werden:

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Eine Steigung von 1 oder 100% bedeutet gerade, dass je horizontaler Wegdifferenz Δx eine ebenso große vertikale Wegdifferenz Δy vorliegt; dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 45°$ ist.

Differenzen- und Differentialquotient

Die meisten Funktionen haben keine einheitliche Steigung. Vielmehr nimmt die Steigung an verschiedenen Stellen unterschiedliche Werte an, kann mitunter in unterschiedlichen Bereichen auch das Vorzeichen wechseln.

Um die durchschnittliche Steigung einer beliebigen Funktion f in einen bestimmten Bereich zwischen einem Startwert x_0 und einem Endwert $x_0 + \Delta x$ angeben zu können, kann man die Funktionswerte $f(x_0)$ und $f(x_0 + \Delta x)$ an den Bereichsgrenzen mit einer Geraden verbinden und ein entsprechendes Steigungsdreieck einzeichnen. Die Steigung dieser – üblicherweise als "Sekante" – bezeichneten Geraden ist nach Gleichung (111) durch den "Differenzenquotient" $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einfach zu berechnen und entspricht der mittleren Steigung der Funktion f im betrachteten Bereich.

$$\text{Durchschnittliche Steigung} \; = \tan\left(\alpha_{\text{S}}\right) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{112}$$

Dabei bezeichnet α_{S} den Winkel, den die Sekante mit der Horizontalen einschließt.

Der Wert der Steigung einer Funktion f an einer einzigen Stelle x_0 lässt sich mit zunehmender Genauigkeit ermitteln, wenn der Bereich um die Stelle x_0 immer kleiner ("feinmaschiger") gewählt wird. Im Grenzfall ist Δx und somit auch das Steigungsdreieck winzig klein. Die Sekante wird hierbei zu einer Tangente, die den Funktionsgraphen augenscheinlich nur noch in einem einzigen Punkt berührt. Für die Steigung der Tangente gilt also:

$$\text{Punktuelle Steigung} \; = \tan\left(\alpha_{\text{T}}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right) \tag{113}$$

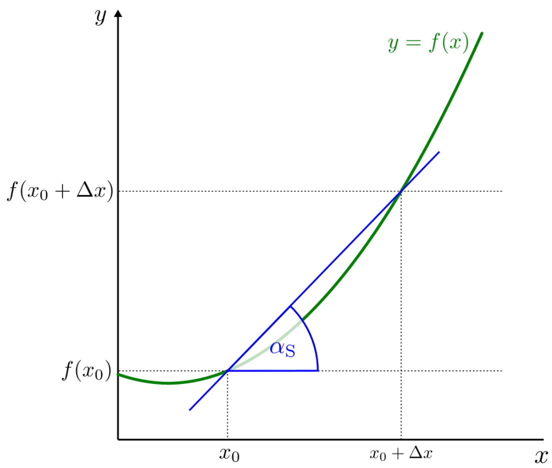


Abb. 125: Steigung der durch $f(x_0)$ und $f(x_0 + \Delta x)$ verlaufenden Sekante als Veranschaulichung des Differenzenquotienten.

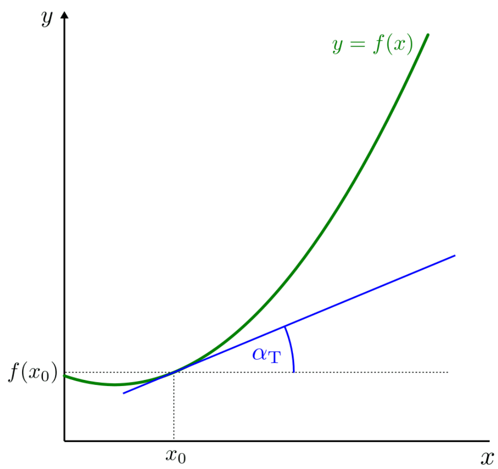


Abb. 126: Steigung der durch $f(x_0)$ verlaufenden Tangente als Veranschaulichung des Differentialquotienten.

Dabei bezeichnet α_{T} den Winkel, den die Sekante mit der Horizontalen einschließt.

Das Schrumpfen des angelegten Steigungsdreiecks um einen bestimmten Punkt herum ähnelt gewissermaßen dem Zusammenziehen eines Knotens. In der mathematischen Symbolik wird bei "infinitesimal" kleinen Steigungsdreiecken anstelle des griechischen Großbuchstabens Δ der Kleinbuchstabe d geschrieben. Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird dabei zum so genannten Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \overset{\text{Grenzwertbildung}}{\Rightarrow} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0

Die Steigung einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist nur dann eindeutig festgelegt, wenn die Steigungen in der unmittelbaren Umgebung links und rechts der Stelle gleich sind. Dies ist fast immer der Fall, doch es gibt Ausnahmen.

Beispiel:

- Der Graph der Betragsfunktion $y = |x|$ besitzt einen Knick an der Stelle $x_0 = 0$. Zeichnet man ein Steigungsdreieck links und rechts dieser Stelle ein, so besitzt die Steigungsgerade auf der linken Seite die Steigung -1, auf der rechten Seite hingegen den Wert $+1$. An der Stelle $x_0 = 0$ ist die Steigung nicht festgelegt – die Funktion ist an dieser Stelle nicht differenzierbar.

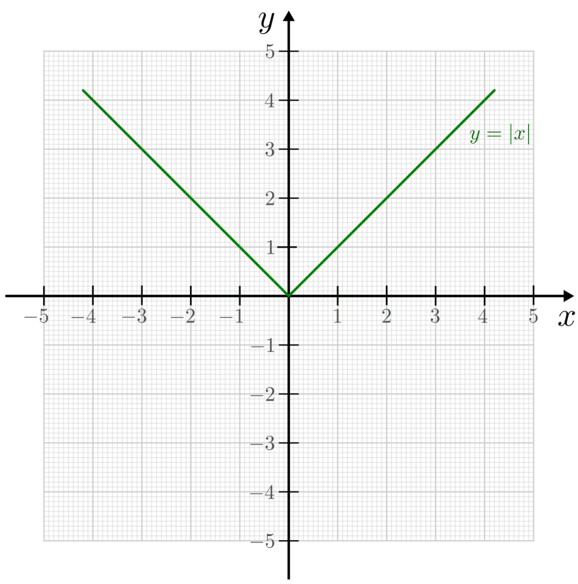


Abb. 127: Graph der Betragsfunktion $y = |x|$. An der Stelle $x_0 = 0$ ist die Funktion nicht differenzierbar.

Anschaulich sind Funktionen dann differenzierbar, wenn sich die Steigung ihrer Graphen *kontinuierlich* ändert, die Graphen also keinen "Knick" besitzen. Hierauf ist insbesondere an den Bereichsgrenzen von abschnittsweise definierten Funktionen (z.B. Signumsfunktion, Betragsfunktion, Stufenfunktion, usw.) sowie an Polstellen von gebrochen-rationalen Funktionen zu achten.

Besitzt eine Funktion eine Definitionslücke, so kann an dieser Stelle nichts über die Differenzierbarkeit der Funktion ausgesagt werden.

Um die Steigung unmittelbar links und unmittelbar rechts der Stelle x_0 berechnen zu können, wählt man die Stelle x_0 selbst als Bereichsgrenze. Wählt man als zweite Bereichsgrenze x-Werte, die nur ein wenig kleiner bzw. größer als x_0 sind, so erhält man Steigungsdreiecke, die unmittelbar links bzw. rechts der untersuchten Stelle an der Funktion anliegen.

Mathematisch lassen sich die beiden unmittelbar angrenzenden Steigungen wie folgt ausdrücken:

$$\text{Steigung links von } x_0\text{:} \; = \lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x < 0}} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

$$\text{Steigung rechts von } x_0\text{:} \; = \lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x > 0}} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

Stimmen die beiden Grenzwerte auf linken und auf der rechten Seite der Stelle x_0 überein, so ist die Funktion an dieser Stelle differenzierbar, und der Wert ihre Steigung ist gleich dem Steigungswert der beiden Grenzwerte.

Beispiel:

- Die Funktion $f(x) = |x|$ soll auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$ hin untersucht werden.

  Um die Betragstriche weglassen zu können, zerlegt man die Funktion in zwei Teilfunktionen $f(x) = -x$ für $x < 0$ und $f(x) = +x$ für $x \ge 0$. An der Stelle $x_0 = 0$ gilt somit für den linksseitigen Grenzwert:

  $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x < 0}} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x < 0}} \left(\frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x < 0}} \left(\frac{-\Delta x}{\Delta x} \right) = -1$$

  $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x > 0}} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x > 0}} \left(\frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x > 0}} \left(\frac{+\Delta x}{\Delta x} \right) = +1$$

  Hierbei wurde jeweils $x_0 = 0$ eingesetzt und die Betragsfunktion in Abhängigkeit des Vorzeichens von Δx ausgewertet. Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert stimmen nicht überein, die Funktion ist somit an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

An jeder anderen Stelle, beispielsweise $x_0 = -5$, ist die Funktion $f(x) = |x|$ jedoch differenzierbar, denn dabei gilt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x < 0}} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x < 0}} \left(\frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x < 0}} \left(\frac{|-5 + \Delta x| - |-5|}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta x < 0}} \left(\frac{+5 - \Delta x - 5}{\Delta x} \right) = -1
\end{aligned}$$

Dieser Wert des Differentialquotienten gilt in diesem Fall sowohl für positive wie für negative Δx-Werte, da diese im Vergleich zu x_0 klein sind und daher keine Auswirkung auf das Vorzeichen der Betragsfunktion haben.

Herleitung von Ableitungsregeln

Um die Steigung einer Funktion $f(x)$ für beliebige Punkte angeben zu können, ist es nützlich, eine Funktion $f'(x)$ zu finden, deren Funktionswerte eben den Werten der Steigungen von $f(x)$ entsprechen. Die Funktion $f'(x)$ wird dabei als "Ableitung" von $f(x)$, die Bestimmung von $f(x)$ als "Ableiten" von $f(x)$ bezeichnet.

Um eine allgemeine Ableitungsregel für beliebige x-Werte herzuleiten, wird zunächst der Differentialquotient für die betrachtete Funktion aufgestellt. Durch geschickte Umformungen versucht man anschließend, den zu untersuchenden Term auf bekannte Grenzwerte hin zurückzuführen (beispielsweise gegen Null konvergierende Terme). Als Ergebnis erhält man dann einen Ausdruck, der die Ableitung $f'(x)$ der Funktion angibt.

Beispiele:

- Die Ableitung für die Funktion $f(x) = x^2$ soll anhand des Differentialquotienten bestimmt werden.

  Der Differentialquotient für diese Funktion lautet allgemein:

  $$\begin{aligned}
  &\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \right) \\
  &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} (2 \cdot x + \Delta x) = 2 \cdot x
  \end{aligned}$$

  In der zweiten Zeile wurde hierbei zunächst die binomische Formel ausmultipliziert, wobei sich die x^2-Terme wegen des unterschiedlichen Vorzeichens aufheben. Anschließend wurde im Zähler Δx ausgeklammert und gekürzt.

  Für die Funktion $f(x) = x^2$ ist die zugehörige Ableitungsfunktion somit $f'(x) = 2 \cdot x$.

- Die Ableitung für die Funktion $f(x) = 4 \cdot x^3 - 5 \cdot x$ soll anhand des Differentialquotienten bestimmt werden.

Der Differentialquotient für diese Funktion lautet allgemein:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\big(4\cdot(x+\Delta x)^3 - 5\cdot(x+\Delta x)\big) - \big(4\cdot x^3 - 5\cdot x\big)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\big(4\cdot(x^3 + 3\cdot x^2\cdot\Delta x + 3\cdot x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 5\cdot x - 5\cdot\Delta x\big) - (4\cdot x^3 - 5\cdot x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{12\cdot x^2\cdot\Delta x + 12\cdot x\cdot(\Delta x)^2 - 5\cdot\Delta x}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \big(12\cdot x^2 + 12\cdot x\cdot\Delta x - 5\big)$$

$$= 12\cdot x^2 - 5$$

In der zweiten Zeile wurde hierbei wiederum die binomische Formel ausmultipliziert, wobei sich die $4\cdot x^3$-Terme und $5\cdot x$-Terme jeweils wegen der unterschiedlichen Vorzeichen aufheben. Anschließend wurde im Zähler Δx ausgeklammert und gekürzt; im resultierenden Ausdruck geht der Term $12 \cdot x \cdot \Delta x$ wegen $\Delta x \to 0$ gegen Null.

Für die Funktion $f(x) = 4 \cdot x^3 - 5 \cdot x$ ist die zugehörige Ableitungsfunktion somit $f'(x) = 12 \cdot x^2 - 5$.

Glücklicherweise wurden, wie in den nächsten Abschnitten näher beschrieben ist, mit Hilfe der obigen Methode für alle elementaren Funktionen allgemeine Ableitungsregeln hergeleitet, so dass man die Ableitung einer Funktion in praktischen Anwendungen sehr häufig mit deutlich weniger Rechenaufwand bestimmen kann.

Ableitungen von Potenz- und Wurzelfunktionen

Allgemein können *Potenz- und Wurzelfunktionen* in der Form $y = f(x) = x^n$ dargestellt werden, wobei $n \in \mathbb{Q}^+$ eine beliebige positive rationale Zahl ist. Diese Funktionen sind an allen Stellen ihres Definitionsbereichs differenzierbar, da bei Ableitungen von Hyperbelfunktionen ihre Steigung entweder gleich bleibt oder sich kontinuierlich ändert.[1] Es lässt sich somit jeweils eine Funktion $f'(x)$ finden, die für jeden Wert x des Definitionsbereichs genau den Wert der Steigung von $f(x)$ als Funktionswert liefert. Eine solche Funktion $f'(x)$ wird Ableitungsfunktion oder kurz Ableitung von $f(x)$ genannt.

[1] Diese Regel lässt sich mit Hilfe des *Differentialquotienten* und der *allgemeinen binomischen Formel* herleiten. Für $y = f(x) = x^n$ lautet der Differentialquotient:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \right) = \frac{\left(x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot (\Delta x)^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot (\Delta x)^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot (\Delta x)^n\right) - x^n}{\Delta x}$$

Die beiden x^n-Terme heben sich dabei aufgrund des unterschiedlichen Vorzeichens auf. Alle verbleibenden Zählerterme enthalten Δx als Faktor, so dass dieser ausgeklammert und gekürzt werden kann. Mit dem *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{1} = n$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right)$$

Geht in diesem Term Δx gegen Null, so werden alle Terme, die Δx als Faktor beinhalten, gegenüber dem Term $n \cdot x^{n-1}$ vernachlässigbar klein. Das Ergebnis entspricht somit der obigen Ableitungsregel für Potenzfunktionen.

Steigung und erste Ableitung

Die erste Ableitung $f'(x)$ einer Funktion gibt an, wie schnell sich ihre Funktionswerte ändern; man spricht auch von der "Steigung" von $f(x)$. Für eine Potenzfunktion lässt sich die zugehörige Ableitung einfach nach folgender Regel bestimmen:[2]

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \tag{114}$$

Die Ableitung einer Potenzfunktion ist somit wieder eine Potenzfunktion, deren Grad um 1 geringer ist als die ursprüngliche Funktion.

Beispiele:

- Für $n = 0$ gilt $f(x) = x^0 = 1$. Diese Funktion liefert für alle x-Werte konstant den Wert 1, die Funktionswerte ändern sich also nicht. Die Steigung muss in diesem Fall also gleich Null sein. Nach der obigen Regel wird diese Bedingung erfüllt:

$$\begin{aligned} & f(x) = x^0 \\ \Rightarrow \quad & f'(x) = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \end{aligned} \tag{115}$$

- Für $n = 1$ entspricht $f(x) = x^n$ der Ursprungsgeraden $f(x) = x^1 = x$. Für die Ableitungsfunktion ergibt sich nach Gleichung (114):

$$\begin{aligned} & f(x) = x^1 \\ \Rightarrow\, & f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \end{aligned}$$

  Da eine Gerade stets eine konstante Steigung besitzt, liefert ihre Ableitungsfunktion für alle x einen konstanten Wert. Dieser Wert ist umso größer, je steiler die Gerade verläuft, und negativ, falls es sich um eine fallende Gerade handelt.

- Für $n = 2$ entspricht $f(x) = x^n$ der Normalparabel $f(x) = x^2$. Für die Ableitungsfunktion ergibt sich nach Gleichung (114):

$$\begin{aligned} & f(x) = x^2 \\ \Rightarrow\, & f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x^1 = 2 \cdot x \end{aligned}$$

  Die Steigung der Normalparabel nimmt also konstant zu – von stark negativen Werten links der y-Achse (der Graph der Ableitungsfunktion befindet sich im negativen Wertebereich) bis hin zu stark positiven Werten rechts der y-Achse.

- Für $n = 3$ gilt $f(x) = x^3$, und für die Ableitungsfunktion:

$$\begin{aligned} & f(x) = x^3 \\ \Rightarrow\, & f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3 \cdot x^2 \end{aligned}$$

  Die Ableitungsfunktion $f'(x) = 3 \cdot x^2$ befindet sich stets im positiven Wertebereich, was bedeutet, dass die Steigung der kubischen Funktion $f(x) = x^3$ stets positiv (bzw. Null am Punkt $(0;0)$) ist.

[2] Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Graphen keine "Knicke" besitzen, vgl. Abschnitt *Differenzierbarkeit*.)

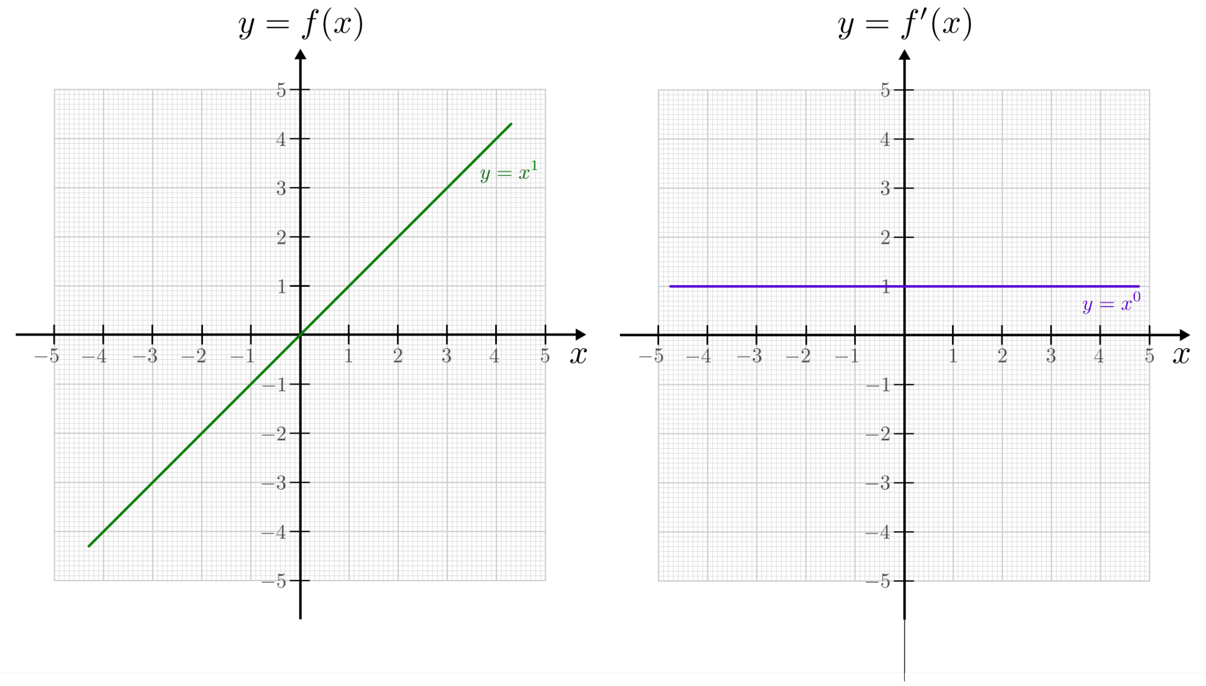


Abb. 128: Funktionsgraph und erste Ableitung (Steigung) der linearen Funktion $y = x$.

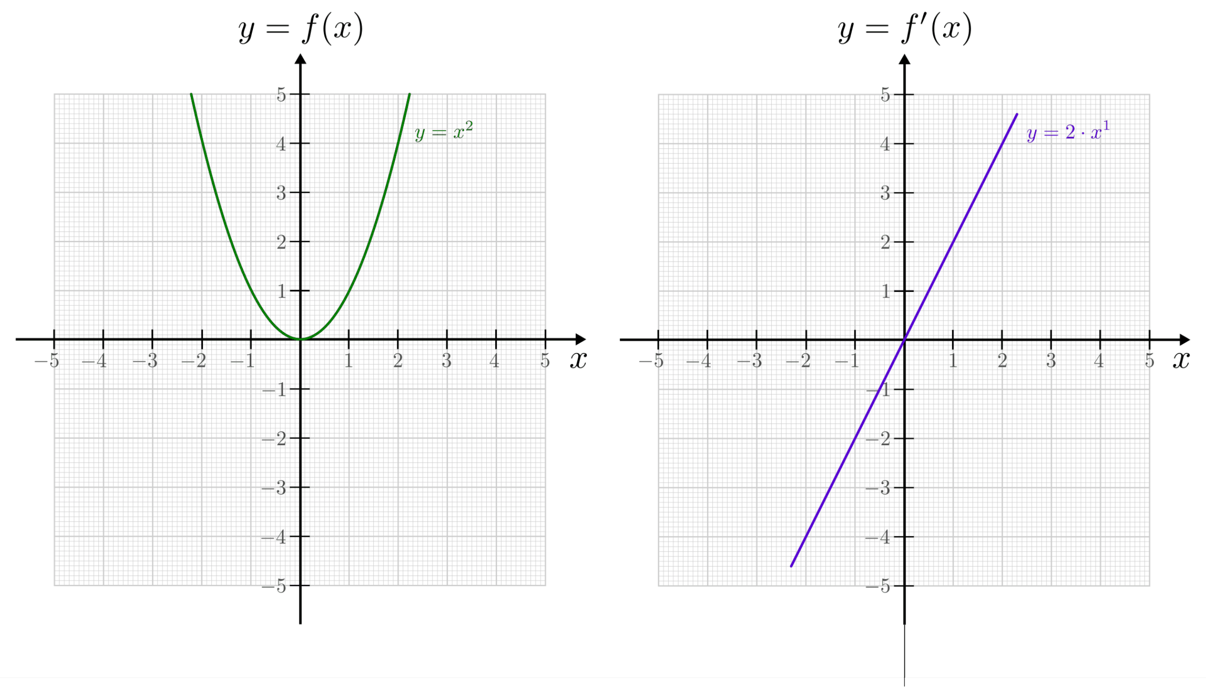


Abb. 129: Funktionsgraph und erste Ableitung (Steigung) der quadratischen Funktion $y = x^2$.

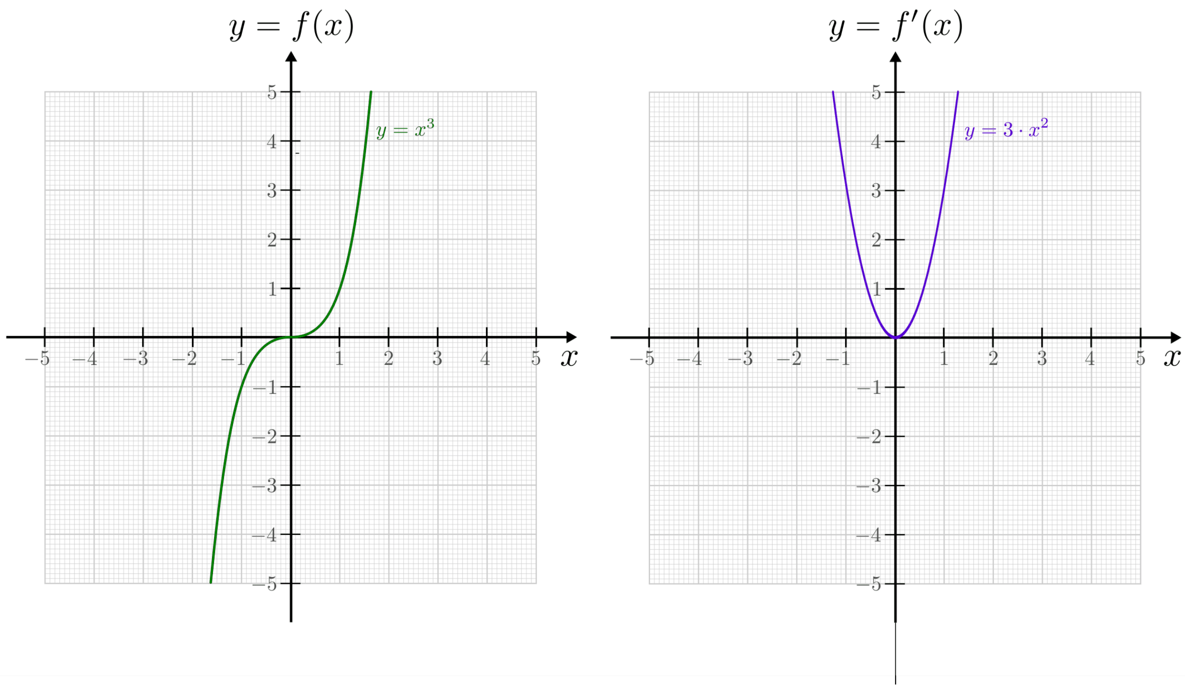


Abb. 130: Funktionsgraph und erste Ableitung (Steigung) der kubischen Funktion $y = x^3$.

- Für $n = \frac{1}{2}$ entspricht $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ nach den *Rechenregeln für Wurzeln und Potenzen* der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$. Für die und für die Ableitungsfunktion $f'(x)$ gilt in diesem Fall:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

  Die Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ befindet sich ebenfalls stets im positiven Wertebereich, da die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ kontinuierlich wächst. Die Werte der Ableitungsfunktion werden jedoch immer geringer, das heißt die Wurzelfunktion wächst zunehmend langsamer.

Die erste Ableitung kann genutzt werden, um differenzierbare Funktionen auf maximale und/oder minimale Funktionswerte hin zu untersuchen.

Extremstellen

Hat eine Funktion an einer Stelle x_0 ein lokales Maximum ("Hochpunkt") oder Minimum ("Tiefpunkt"), so ist an dieser Stelle die Steigung der Funktion und somit auch die erste Ableitung gleich Null. Der Wert der ersten Ableitung an einer Stelle x_0 ist ebenfalls dann gleich Null, wenn die zugehörige Funktion an dieser Stelle einen so genannten "Terrassenpunkt" besitzt. In allen drei Fällen spricht man von Extremstellen, die zugehörigen Funktionswerte von $f(x)$ werden Extremwerte genannt.

Um die Extremstelle(n) einer differenzierbaren Funktion zu finden, genügt es somit, die erste Ableitung zu berechnen und diese gleich Null zu setzen. Löst man die zugehörige

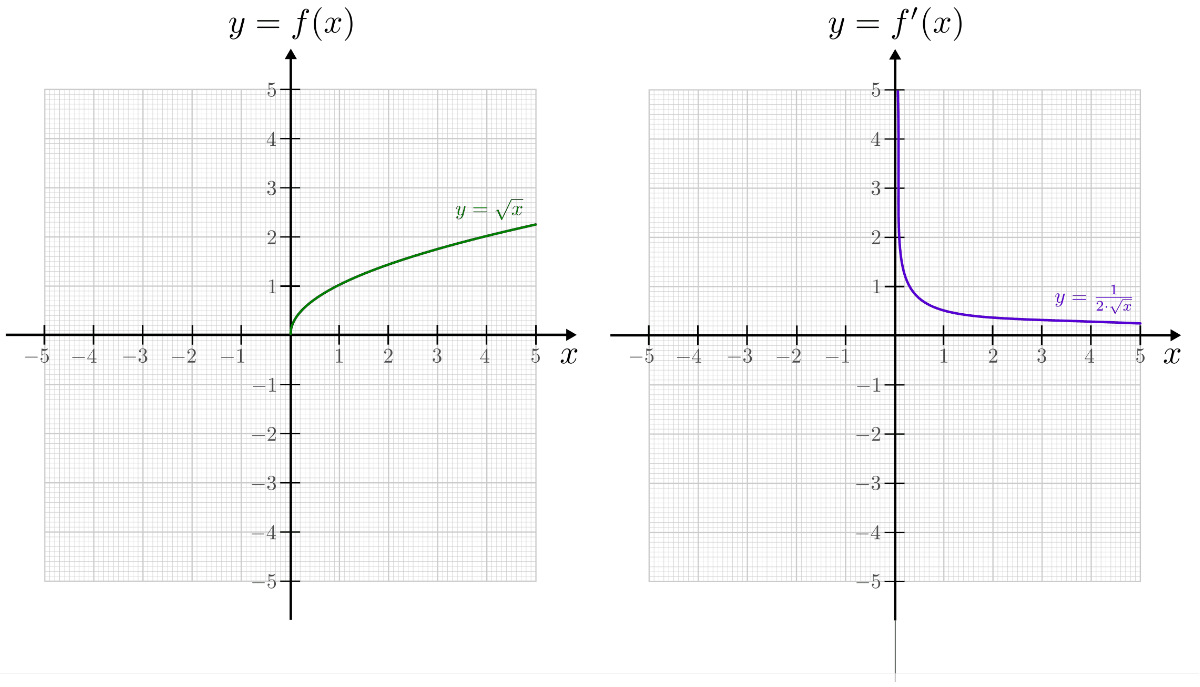


Abb. 131: Funktionsgraph und erste Ableitung (Steigung) der Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$.

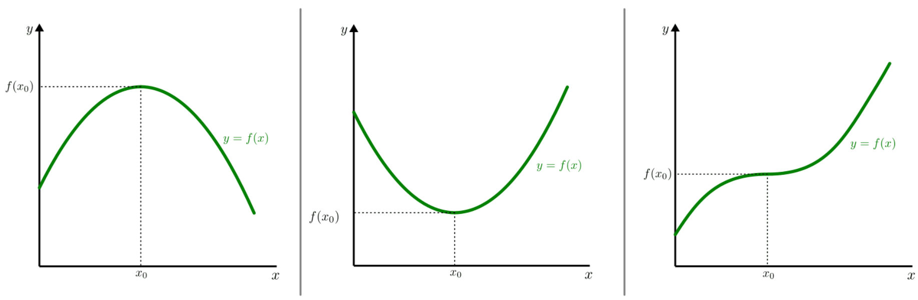


Abb. 132: Beispiel-Graphen mit einem Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt an der Stelle x_0.

Gleichung, so erhält man die x-Werte von allen Extremstellen. Um zu prüfen, ob es sich bei einer Extremstelle um einen Hochpunkt, einen Tiefpunkt oder einen Terrassenpunkt handelt, kann man folgende Fälle prüfen:

- Vor einem Hochpunkt ist die erste Ableitung (Steigung) der Funktion zunächst positiv, nach dem Hochpunkt negativ.
- Vor einem Tiefpunkt ist die erste Ableitung (Steigung) der Funktion zunächst negativ, nach dem Tiefpunkt positiv.
- Vor und nach einem Terrassenpunkt ist die erste Ableitung der Funktion entweder jeweils positiv oder jeweils negativ.

Es genügt also, zu einer gefundenen Extremstelle x_0 einen Wert $x < x_0$ und einen Wert $x > x_0$ in die erste Ableitungsfunktion einzusetzen und die Vorzeichen der jeweiligen Ergebnisse zu prüfen. Auf diese Weise untergliedert man letztlich den Definitionsbereich in so genannte Monotoniebereiche, also Bereiche, in denen die Steigung das gleiche Vorzeichen hat. Man kann hierfür auch eine Tabelle mit den einzelnen Abschnitten als Spalten anlegen und dort die Steigungs-Vorzeichen der einzelnen Abschnitte eintragen. Auch daran kann man die Extremwerte unmittelbar ablesen.

Bisweilen werden auch die einzelnen Hoch- bzw. Tiefpunkte untereinander verglichen. Der Hochpunkt mit dem größten Funktionswert und der Tiefpunkt mit dem niedrigsten Funktionswert werden absolute Extremstellen genannt, weitere Hoch- und Tiefpunkte bezeichnet man als lokale Extremstellen.

Krümmung und zweite Ableitung

Will man nicht nur wissen, welche Steigung eine Funktion an einer bestimmten Stelle aufweist, sondern ist auch daran interessiert, wie schnell sich die Steigung der Funktion ändert, so kann die erste Ableitung erneut abgeleitet werden. Auf diese Weise erhält man die zweite Ableitung $f''(x)$ der ursprünglichen Funktion. Sie gibt an, wie schnell sich die Steigungswerte der Funktion ändern; die Änderung der Steigung wird als "Krümmung" des Graphen bezeichnet.

Stellt man sich ein Fahrzeug vor, das – von oben betrachtet – auf dem Graphen der Funktion in Richtung zunehmender x-Werte entlangfährt, so gibt das "Lenkverhalten" des Fahrzeugs Aufschluss über die Krümmung der Funktion.

- Legt das Fahrzeug auf seinem Weg entlang des Graphen eine Linkskurve zurück, so bezeichnet man die Krümmung der Funktion als positiv.
- Legt das Fahrzeug auf seinem Weg entlang des Graphen eine Rechtskurve zurück, so bezeichnet man die Krümmung der Funktion als negativ.
- Kann das Fahrzeug entlang des Graphen ohne zu lenken "geradeaus" fahren, so ist die Krümmung des Graphen gleich Null.

In verschiedenen Bereichen der Funktion kann die Krümmung unterschiedlich sein. Als anschauliche Beispiele eignen sich ebenfalls die einfachen Potenzfunktionen $f(x) = x^n$.

Beispiele:

- Für $n = 1$ entspricht $f(x) = x^n$ der Ursprungsgeraden $f(x) = x^1 = x$. Für die 1. Ableitung $f'(x)$ sowie für die 2. Ableitung $f''(x)$ ergibt sich mit den Gleichungen (114): und (115):

$$y = f(x) = x^1$$
$$\Rightarrow f'(x) = 1 = \text{konst.}$$
$$\Rightarrow f''(x) = 0$$

  Da die Steigung einer Geraden an allen Stellen gleich ist, tritt keine Krümmung auf: Der Wert der zweiten Ableitung ist – unabhängig vom eingesetzten x-Wert – stets gleich Null.

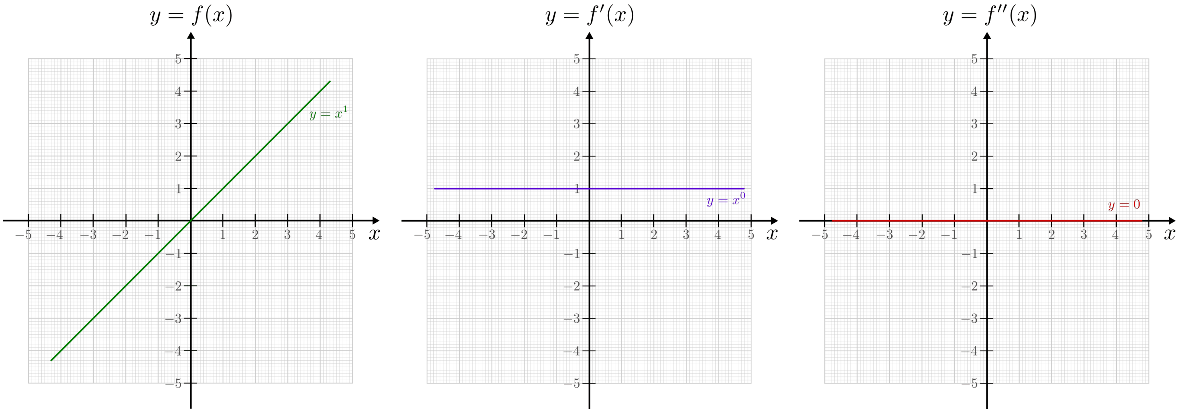


Abb. 133: Funktionsgraph, erste und zweite Ableitung (Steigung bzw. Krümmung) der linearen Funktion $y = x$.

- Für $n = 2$ entspricht $f(x) = x^n$ der Normalparabel $f(x) = x^2$. Für die 1. Ableitung $f'(x)$ sowie für die 2. Ableitung $f''(x)$ ergibt sich entsprechend:

$$y = f(x) = x^2$$
$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x^1$$
$$\Rightarrow f''(x) = 2 \cdot x^0 = 2$$

  Eine Parabel besitzt stets eine konstante Krümmung. Im obigen Beispiel ist die Parabel nach oben geöffnet, ihre Krümmung ist positiv. (Ein Fahrzeug müsste – von oben betrachtet – entlang der Parabel eine Linkskurve fahren.)

- Für $n = 3$ gilt $f(x) = x^3$, und für die Ableitungsfunktionen nach Gleichung (114):

$$f(x) = x^3$$
$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2$$
$$\Rightarrow f''(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^1 = 6 \cdot x$$

  Die zweite Ableitung $f''(x) = 6 \cdot x$ ist links der y-Achse negativ, was der negativen Krümmung der Funktion in diesem Bereich entspricht. Am Punkt $(0;0)$ ist die zweite Ableitung gleich Null, an dieser Stelle hat die Funktion keine Krümmung. Im Bereich rechts der y-Achse ist die zweite Ableitung positiv, was einer Linkskrümmung des Funktionsgraphen entspricht.

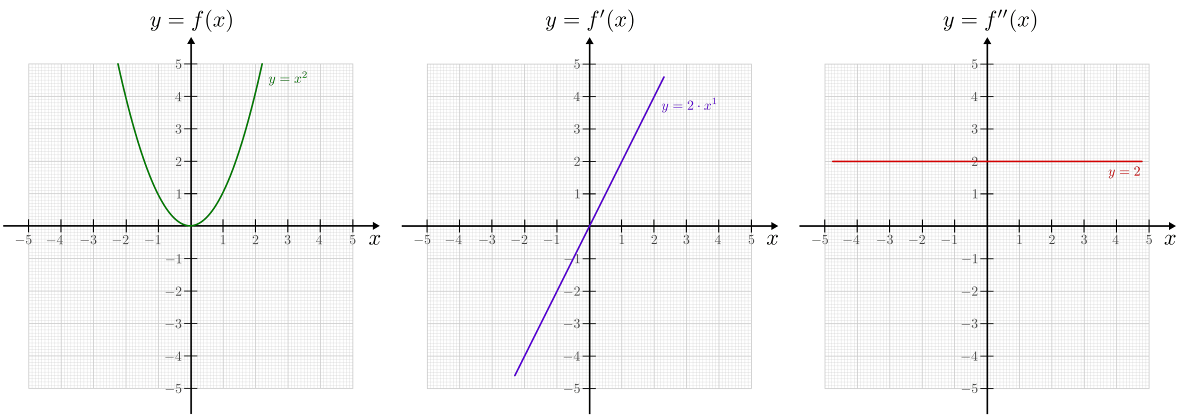


Abb. 134: Funktionsgraph, erste und zweite Ableitung (Steigung bzw. Krümmung) der Parabelgleichung $y = x^2$.

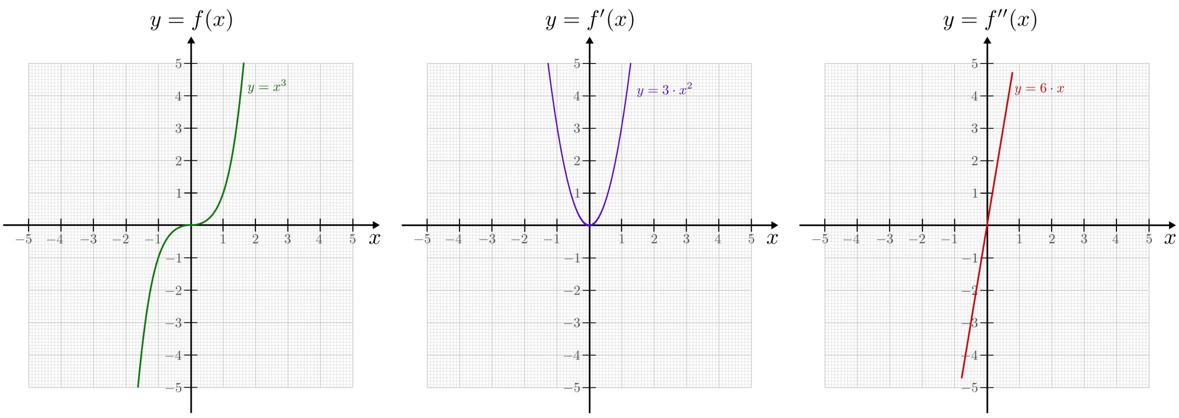


Abb. 135: Funktionsgraph, erste und zweite Ableitung (Steigung bzw. Krümmung) der kubischen Funktion $y = x^3$.

Extremstellen und zweite Ableitung

Hat man die zweite Ableitung einer Funktion berechnet, so kann auch diese zur Klassifizierung von Extremstellen genutzt werden. Hierzu genügt es, den gefundenen Wert x_0 einer Extremstelle in die zweite Ableitung einzusetzen:

- Hat das Ergebnis ein positives Vorzeichen, so hat die Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt.
- Hat das Ergebnis im umgekehrten Fall ein positives Vorzeichen, so hat die Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt.
- Ist das Ergebnis gleich Null, so hat die Funktion an dieser Stelle einen Terrassenpunkt.

Zur Veranschaulichung dieser Zusammenhänge können als elementare Beispiele wiederum die Graphen der Funktionen x^2 und x^3 und ihrer Ableitungen betrachtet werden.

Beispiele:

- Die Funktion $f(x) = x^2$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine Extremstelle; der Wert ihrer zweiten Ableitung $f''(x) = 2$ an dieser Stelle ist $f''(0) = 2$, es muss sich somit um einen Tiefpunkt handeln.
- Die Funktion $f(x) = x^3$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine Extremstelle; der Wert ihrer zweiten Ableitung $f''(x) = 6 \cdot x$ an dieser Stelle ist $f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$, es muss sich somit um einen Terrassenpunkt handeln.

Die Methode, die Art der Extremstellen mittels der zweiten Ableitung zu bestimmen, ist gegenüber der oben genannten Methode effizienter, da nur einmal ein x-Wert in eine Funktion eingesetzt und der zugehörige Funktionswert berechnet werden muss.

Wendepunkte

Ändert sich an einer Stelle x_0 die Krümmung einer Funktion, so ist an dieser Stelle die zweite Ableitung gleich Null. Diese Bedingung kann genutzt werden, um so genannte Wendepunkte einer Funktion zu bestimmen.

Um Wendepunkte einer differenzierbaren Funktion zu finden, genügt es somit, die zweite Ableitung zu berechnen und diese gleich Null zu setzen. Löst man die zugehörige Gleichung, so erhält man die x-Werte aller möglicher Wendepunkte; durch Einsetzen der x-Werte in die ursprüngliche Funktion erhält man die zugehörigen y-Werte. Es muss allerdings – ähnlich wie bei *Extremstellen* – geprüft werden, ob es sich bei den jeweiligen Stellen tatsächlich um Wendepunkte der Funktion handelt:

- Ist die zweite Ableitung (Krümmung) einer Funktion zunächst negativ und anschließend positiv oder umgekehrt, so handelt es sich um einen Wendepunkt.
- Hat die zweite Ableitung (Krümmung) einer Funktion sowohl vor als auch nach einer Stelle x_0 das gleiche Vorzeichen, so ist diese Stelle kein Wendepunkt.

Es genügt also, zu einer gefundenen Nullstelle x_0 der zweiten Ableitung einen Wert $x < x_0$ und einen Wert $x > x_0$ in die zweite Ableitungsfunktion einzusetzen und die Vorzeichen der jeweiligen Ergebnisse zu prüfen.[3]

Ableitungen von ganz- und gebrochenrationalen Funktionen

Ableitungen von ganzrationalen Funktionen

Eine ganzrationale Funktion hat allgemein folgende Form:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_{\mathrm{n}} \cdot x^n + a_{\mathrm{n-1}} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

Um die Ableitung einer solchen Funktion zu bestimmen, müssen folgende zwei Ableitungsregeln verwendet werden:

- Wird eine Funktion $f(x)$ mit einem konstanten Faktor c multipliziert, so bleibt dieser Faktor beim Ableiten unverändert erhalten. Für die Ableitung gilt somit:

  $$\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot f'(x)$$

  Ist c negativ, so ist die Funktion gegenüber der ursprünglichen Funktion an der x-Achse gespiegelt. In diesem Fall hat auch die Steigung ein umgekehrtes Vorzeichen.

- Besteht eine Funktion $f(x)$ aus einer Summe von Einzelfunktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., so ist die Ableitung gleich der Summe der Ableitungen der Einzelfunktion. Es gilt also:

  $$\big(f_1(x) + f_2(x)\big)' = f_1'(x) + f_2'(x)$$

Mit den obigen Regeln und den *Ableitungsregeln für Potenzfunktionen* ergibt sich somit für die erste Ableitung einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades:

$$f'(x) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \ldots + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x^1 + a_1$$

Die Ableitung einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades ist somit eine ganzrationale Funktion $(n-1)$-ten Grades. Leitet man die Funktion ein zweites mal ab, so wird der Grad der Ableitungsfunktion wiederum um 1 niedriger. Für die zweite Ableitung gilt entsprechend:

$$f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} + (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-3} + \ldots + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot x^1 + 2 \cdot a_2$$

Insgesamt lässt sich eine ganzrationale Funktion n-ten Grades also n mal ableiten; alle weiteren Ableitungen sind gleich Null.

[3] Sofern die dritte Ableitung der Funktion bereits berechnet wurde, kann auch diese genutzt werden, um zu überprüfen, ob es sich bei einer Stelle x_0 um einen Wendepunkt handelt: Setzt man diesen Wert in die dritte Ableitung ein und ist das Ergebnis ungleich Null, so handelt es sich um einen Wendepunkt.
Ist die dritte Ableitung an der untersuchten Stelle $f'''(x_0) = 0$, so kann ein Wendepunkt jedoch nicht ausgeschlossen werden! Die oben genannte Methode ist also für die Bestimmung von Wendepunkten zu bevorzugen.

Ableitungen von gebrochenrationalen Funktionen

Eine *gebrochenrationale Funktion* hat allgemein folgende Form:

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot x^k} = \frac{a_{\mathrm{n}} \cdot x^n + a_{\mathrm{n-1}} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{b_{\mathrm{m}} \cdot x^m + b_{\mathrm{m-1}} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + a_0}$$

Gebrochenrationale Funktionen bestehen also aus einem Zählerpolynom $Z(x)$ mit Grad n und einem Nennerpolynom $N(x)$ mit Grad m; die Grade des Zählerpolynoms und des Nennerpolynoms unterscheiden sich also um $n - m$. Um eine solche Funktion ableiten zu können, muss eine weitere Ableitungsregel verwendet werden:

- Besteht eine Funktion $f(x)$ aus einem Quotienten zweier Einzelfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, so lässt sich die Ableitung von $f(x)$ nach folgender Regel berechnen:

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{\big(f_2(x)\big)^2}$$

Für die Ableitung einer gebrochenrationalen Funktion gilt also:

$$f'(x) = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - N'(x) \cdot Z}{\big(N(x)\big)^2} \qquad (116)$$

Die Ableitungen des Zähler- bzw. Nennerpolynoms werden dabei gemäß den Regeln für Ableitungen ganzrationaler Funktionen gebildet. Das Ergebnis ist hierbei wiederum eine gebrochenrationale Funktion, wobei sich die Grade des Zählerpolynoms und des Nennerpolynoms der Ableitung um $n - m - 1$ unterscheiden.

Echt gebrochen-rationale Funktionen mit $n < m$ lassen sich somit unbegrenzt oft ableiten, wobei die einzelnen Ableitungen niemals gleich Null sind.

Ableitungen von Hyperbelfunktionen

Hyperbeln, also Funktionen der Form $f(x) = \frac{1}{x^n}$, sind der einfachste Sonderfall von gebrochenrationalen Funktionen. Für ihre Ableitung gilt:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - n \cdot x^{n-1} \cdot 1}{(x^n)^2} = \frac{-n \cdot x^{n-1}}{x^{2 \cdot n}} = -n \cdot x^{(n-1)-2 \cdot n} = -n \cdot x^{-n-1}$$

Schreibt man für die Hyperbelfunktion $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, so zeigt sich, dass die Ableitungen entsprechend der *Ableitungsregel für Potenzfunktionen* gebildet werden können:

$$\big(x^{-n}\big)' = -n \cdot x^{-n-1} \qquad (117)$$

Die Ableitungsregel für Potenzfunktionen gilt also nicht nur für positive rationale Werte von n, sondern allgemein für negative ganzzahlige Werte von n.

Ableitungen von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten

Um zu zeigen, dass die Ableitungsregel für Potenzfunktionen allgemein für jede rationale Zahl $n = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ gilt, muss eine weitere Ableitungsregel verwendet werden:

- Besteht eine Funktion $f(x)$ aus einer *Verkettung zweier Einzelfunktionen* $f_1(x)$ und $f_2(x)$, so lässt sich die Ableitung von $f(x)$ nach der so genannten "Kettenregel" berechnen:

  $$\Big(f_1\big(f_2(x)\big)\Big)' = \Big(f_1'\big(f_2(x)\big)\Big) \cdot f_2'(x)$$

  Dabei wird zunächst die äußere Funktion abgeleitet, die innere Funktion bleibt dabei unverändert. Anschließend wird der sich ergebende Term mit der Ableitung der inneren Funktion multipliziert.

Für die Ableitung einer Potenzfunktion $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ mit rationalem Exponenten $n = \frac{p}{q}$ gilt damit:

$$\begin{aligned}
\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left((x^p)^{\frac{1}{q}}\right)' &= \frac{1}{q} \cdot (x^p)^{\left(\frac{1}{q}-1\right)} \cdot p \cdot x^{(p-1)} \\
&= \frac{p}{q} \cdot x^{p \cdot \left(\frac{1}{q}-1\right)} \cdot x^{(p-1)} \\
&= \frac{p}{q} \cdot x^{\left(\frac{p}{q}-p\right)+(p-1)} \\
&= \frac{p}{q} \cdot x^{\left(\frac{p}{q}-1\right)} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Hierbei werden die *Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln* genutzt und $f_1(x) = x^{\frac{1}{q}}$ als "äußere" sowie $f_2(x) = x^p$ als "innere" Funktion interpretiert. Beim Ableiten der äußeren Funktion bleibt die innere Funktion als eigener Term unverändert. Das Ergebnis wird anschließend mit der Ableitung der inneren Funktion multipliziert, was umgangssprachlich als "Nachdifferenzieren" bezeichnet wird. Ein Zusammenfassen der einzelnen Terme führt schließlich zum gesuchten Endergebnis.

Ableitungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen

Ableitungen von Exponentialfunktionen

Eine Ableitungsregel für *Exponentialfunktionen* kann mit Hilfe des *Differentialquotienten* hergeleitet werden. Für eine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ gilt:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{a^{(x+\Delta x)} - a^x}{\Delta x}\right)$$

Mit Hilfe der *Rechenregeln für Potenzen* kann dieser Term weiter umgeformt werden. Es folgt:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{a^{(x+\Delta x)} - a^x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{a^x + a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right) \cdot a^x$$

Die Ableitung einer Exponentialfunktion ist somit wieder eine Exponentialfunktion, die mit einem konstanten, jedoch von der Basis a abhängigen Faktor multipliziert wird. Es lässt sich ein bestimmter Wert a_0 finden, für den der genannte Faktor gleich 1 ist. Hierfür muss gelten:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{a_0^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_0 = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Dieser Grenzwert entspricht formal dem Grenzwert einer Folge $\lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ reeller Zahlen. Dieser Grenzwert konnte erstmals von Leonhard Euler bestimmt werden und wird zu dessen Ehren "Eulersche Zahl" e genannt:

$$e = \lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = 2,718281\ldots$$

Diese Zahl ist irrational und für die Mathematik von ähnlicher Bedeutung wie die Kreiszahl π: Ist nämlich die Eulersche Zahl e Basis einer Exponentialfunktion, ist also $f(x) = e^x$, so ist die Ableitungsfunktion mit der ursprünglichen Funktion identisch, es gilt in diesem Fall also:

$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^x \tag{118}$$

Die Funktion $f(x) = e^x$ wird mitunter auch als "natürliche" Exponentialfunktion bezeichnet.

Für beliebige Exponentialfunktionen lässt sich eine Ableitungsregel herleiten, indem man ausnutzt, dass Exponential- und Logarithmusfunktionen bei gleicher Basis a zueinander Umkehrfunktionen sind, also beispielsweise $e^{\ln(a)} = a$ gilt. Für eine allgemeine Exponentialfunktion kann folglich geschrieben werden:

$$f(x) = a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

Um diese Funktion ableiten zu können, muss – wie schon im Abschnitt *Ableitungen von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten* die so genannte "Kettenregel" genutzt werden:

- Die Ableitung einer verketteten Funktion $f(x) = f_1\big(f_2(x)\big)$ ist gleich der Ableitung der äußeren Funktion multipliziert mit der Ableitung der inneren Funktion:

  $$\Big(f_1\big(f_2(x)\big)\Big)' = \Big(f_1'\big(f_2(x)\big)\Big) \cdot f_2'(x)$$

  Beim Ableiten der äußeren Funktion wird die innere Funktion dabei unverändert gelassen.

Für die obige Gleichung $f(x) = e^{x \cdot \ln(a)}$ entspricht $f_1(x) = e^x$ der äußeren und $f_2 = \ln(a) \cdot x$ der inneren Funktion. Da $\ln(a) =$ konstant ist, gilt:[1]

$$f'(x) = \underbrace{e^{x \cdot \ln(a)}}_{\text{Ableitung der äußeren Funktion}} \cdot \underbrace{\ln(a)}_{\text{Ableitung der inneren Funktion}}$$

[1] Um sich die Wirkung der Kettenregel im Detail vorstellen zu können, kann man an dieser Stelle auch $z = x \cdot \ln(a)$ schreiben. Die äußere Funktion ist dann $f_1(z) = e^z$, deren Ableitung $f_1'(z) = e^z = e^{x \cdot \ln(a)}$ ist.

Die natürliche Exponentialfunktion als äußere Funktion bleibt hierbei unverändert, die Ableitung der inneren Funktion $f_2 = \ln(a) \cdot x = c \cdot x$ ergibt den Wert $f_2'(x) = \ln(a)$. Für Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis a gilt also:

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \ln(a) \cdot a^x \tag{119}$$

In dieser Formel ist wegen $\ln(e) = 1$ der Sonderfall für die natürliche Exponentialfunktion enthalten.

Ableitungen von Logarithmusfunktionen

Um eine Ableitungsregel für Logarithmusfunktionen herzuleiten, wird eine weitere, als "Umkehrregel" bezeichnete Ableitungsregel verwendet:

- Die Ableitung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ einer Funktion $y = f(x)$ ist gleich dem Kehrwert der Ableitung ihrer Umkehrfunktion $f_{\mathrm{u}}(y)$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} \quad \text{beziehungsweise} f'(x) = \frac{1}{f_{\mathrm{u}}'(y)}$$

Im Fall einer Logarithmusfunktion ist $y = f(x) = \log_a(x)$ und, wenn man beide Seiten als Potenz zur Basis a schreibt, $x = f_{\mathrm{u}}(y) = a^y$. Somit gilt nach der Ableitungsregel (119) für Exponentialfunktionen:

$$f_{\mathrm{u}}'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \ln(a) \cdot a^y = \ln(a) \cdot x$$

Für die Ableitung der Logarithmusfunktion gilt schließlich:

$$f(x) = \log_a(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x} \tag{120}$$

Im Sonderfall der natürlichen Logarithmusfunktion $\ln(x) = \log_e(x)$ ist $\ln(e) = 1$ und somit:

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \tag{121}$$

Alle weiteren Ableitungen der Logarithmusfunktion lassen sich dann gemäß den *Ableitungsregeln für gebrochenrationalen Funktionen* bestimmen.

Ableitungen von trigonometrischen Funktionen

Im Folgenden sollen die Ableitungen der *trigonometrischen Funktionen* $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ und $\cot(x)$ hergeleitet werden.

Ableitung der Sinusfunktion

Um eine Ableitungsregel für die Sinusfunktion $y = f(x) = \sin(x)$ herzuleiten, geht man vom *Differentialquotienten* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ aus. Dieser lautet für die Sinusfunktion:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \right)$$

Mittels des *Additionstheorems* $\sin(x_1) - \sin(x_2) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$ kann der Zählerterm folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sin(x + \Delta x) - \sin(x) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{(x + \Delta x) + x}{2} \right) \cdot \sin\left(\frac{(x + \Delta x) - x}{2} \right) \\ &= 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2} \right) \end{aligned}$$

Damit kann der Differentialquotient in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{2 \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \right)$$

Im letzten Rechenschritt wurde der Faktor 2 in Form eines Doppelbruchs in den Nenner gezogen, um die Form auf der rechten Seite zu erhalten. Der Differentialquotient ist als Grenzwert eines Produkts zweier Funktionen gemäß den *Rechenregeln für Grenzwerte* gleich dem Produkt der Grenzwerte beider Funktionen. Für den Grenzwert des ersten Faktors gilt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) = \cos(x)$$

Der Grenzwert des zweiten Faktors kann zur besseren Lesbarkeit als $\lim_{z \to 0} \left(\frac{\sin(z)}{z} \right)$ mit $z = \frac{\Delta x}{2}$ geschrieben werden. Um diesen Grenzwert für kleine Werte von z abzuschätzen, kann man die Sinusfunktion mit der Cosinus- und der Tangensfunktion vergleichen. Dabei gilt mit $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$:

$$\sin(z) < z < \tan(z) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 < \frac{z}{\sin(z)} < \frac{1}{\cos(z)} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 > \frac{\sin(z)}{z} > \cos(z)$$

Im ersten Rechenschritt wurde durch $\sin(z)$ dividiert, im zweiten wurden die Kehrwerte der Terme betrachtet, wobei sich die Ungleichheitszeichen umkehren. Wegen $\lim_{z \to 0} \cos(z) = 1$ wird die Ungleichung zu $1 > \lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} > 1$, also muss gelten:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

Für die Ableitung der Sinus-Funktion folgt damit:

$$f(x) = \sin(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \cos(x) \tag{122}$$

Die Ableitung der Sinus-Funktion ist also gleich der Cosinus-Funktion.

Ableitung der Cosinusfunktion

Die Ableitung der Cosinus-Funktion kann mit Hilfe der Ableitungsregel der Sinusfunktion anhand des Zusammenhangs $\cos(x) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$ bestimmt werden; dabei wird wiederum die *Kettenregel* verwendet. Mit $f_1(x) = \sin(x)$ als der äußeren und $f_2 = -x + \frac{\pi}{2}$ als der inneren Funktion gilt:

$$\big(\cos(x)\big)' = \left(\sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \underbrace{\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{Ableitung der äußeren Funktion}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{Ableitung der inneren Funktion}}$$

Da $\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$ gilt, folgt für die Ableitung der Cosinus-Funktion:

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x) \tag{123}$$

Die Ableitung der Cosinus-Funktion ist also gleich der negativen Sinusfunktion.

Ableitung der Tangens- und Cotangensfunktion

Die Ableitung der Tangensfunktion $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ kann mit Hilfe der Ableitungsregeln der Sinus- und Cosinusfunktion bestimmt werden; dabei wird wiederum die *Quotientenregel* verwendet:

$$\begin{aligned}\big(\tan(x)\big)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x)) \cdot \sin(x)}{\big(\cos(x)\big)^2} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

Für die Ableitung der Tangensfunktion gilt also:

$$f(x) = \tan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \tag{124}$$

Für die Cotangensfunktion $f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ gilt entsprechend:

$$\begin{aligned}\big(\cot(x)\big)' = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' &= \frac{-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\big(\sin(x)\big)^2} \\ &= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}\end{aligned}$$

Für die Ableitung der Cotangensfunktion gilt also:

$$f(x) = \cot(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \tag{125}$$

Zusammenfassung wichtiger Ableitungsregeln

Im Folgenden sind die wichtigsten Ableitungsregeln der vorherigen Abschnitte nochmals kurz zusammengefasst.

Allgemeine Ableitungsregeln

Die folgenden Ableitungsregeln sind allgemein für beliebige Funktionen gültig:

- Lässt sich eine Funktion $f(x)$ als Summe einer anderen Funktion $f_1(x)$ mit einem konstanten Summanden c darstellen, so ist ihre Ableitungsfunktion $f'(x)$ mit der Ableitung $f_1'(x)$ der anderen Funktion identisch:

  $$f_1(x) = f_2(x) + c \quad \Rightarrow \quad f_1'(x) = f_2'(x) \tag{126}$$

  Insbesondere ist die Ableitung beziehungsweise Steigung einer konstanten Funktion $f(x) = c$ gleich Null.

- Lässt sich eine Funktion $f_1(x)$ als Produkt einer anderen Funktion $f_2(x)$ mit einem konstanten Faktor c darstellen, so entspricht ihre Ableitungsfunktion $f_1'(x)$ derjenigen der anderen Funktion $f_2(x)$, wenn diese mit dem gleichen Faktor c multipliziert wird.

  $$f_1(x) = c \cdot f_2(x) \quad \Rightarrow \quad f_1'(x) = c \cdot f_2'(x) \tag{127}$$

Für jede beliebige Funktion $f(x)$, die man sich aus zwei Teilfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zusammengesetzt denken kann, sind folgende Ableitungsregeln nützlich:

- Additionsregel:

  Besteht eine Funktion $f(x)$ aus einer Summe zweier Teilfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, so gilt für ihre Ableitung $f'(x)$:

  $$[f_1(x) + f_2(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) \tag{128}$$

- Produktregel:

  Besteht eine Funktion $f(x)$ aus einem Produkt zweier Teilfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, so gilt für ihre Ableitung $f(x)$:

  $$[f_1(x) \cdot f_2(x)]' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_2'(x) \cdot f_1(x) \tag{129}$$

- Quotientenregel:

  Besteht eine Funktion $f(x)$ aus einem Quotienten zweier Teilfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, so gilt für ihre Ableitung $f(x)$:

  $$\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_2'(x) \cdot f_1(x)}{\left(f_2(x)\right)^2} \tag{130}$$

- Kettenregel

  Besteht eine Funktion $f(x)$ aus einer *Verkettung* zweier Teilfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, so gilt für ihre Ableitung $f(x)$:

  $$\left[f_1\big(f_2(x)\big)\right]' = f_1'\big(f_2(x)\big) \cdot f_2'(x) \tag{131}$$

  Hierbei wird zunächst die Ableitung f_1' der äußeren Funktion gebildet, wobei die innere Funktion unverändert gelassen wird. Der resultierende Term wird anschließend mit der Ableitung der inneren Funktion multipliziert.

Satz von Rolle und Mittelwertsatz

Ist eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall $]a;b[$ stetig differenzierbar und gilt zudem $f(a) = f(b)$, so existiert mindestens eine Stelle x_0 innerhalb des Intervalls, für die $f'(x_0) = 0$ gilt. Dieser Zusammenhang wird "Satz von Rolle" genannt.

Anschaulich bedeutet der Satz von Rolle, dass es entlang eines stetig verlaufenden Graphen zwischen zwei Kurvenpunkten mit übereinstimmenden y-Werten mindestens einen Punkt gibt, an dem der Graph eine waagrechte Tangente (Steigung Null) besitzt; insbesondere muss sich damit zwischen zwei Nullstellen einer stetigen Funktion stets eine Extremstelle befinden.

Der Satz von Rolle kann auch allgemeiner formuliert werden: Ist eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall $]a;\, b[$ stetig differenzierbar, so existiert mindestens eine Stelle x_0 innerhalb des Intervalls, für die gilt:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dieser so genannte Mittelwertsatz besagt anschaulich, dass es entlang eines stetig verlaufenden Graphen zwischen zwei Kurvenpunkten stets (mindestens) einen Punkt x_0 gibt, dessen Tangentensteigung gleich der Steigung der durch $f(a)$ und $f(b)$ verlaufenden Sekante ist. Der Mittelwertsatz kann somit als Erweiterung des Satzes von Rolle aufgefasst werden, da er diesen für $f(a) = f(b)$ als Sonderfall enthält.

Ableitungsregeln wichtiger Funktionen

Bezeichnung	$f(x)$	$f'(x)$	Bedingung(en)
Potenzfunktion	x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
Exponentialfunktion	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$a > 0,\ a \neq 1$
Natürliche Exponentialfunktion	e^x	e^x	
Logarithmusfunktion	$\log(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
Natürliche Logarithmusfunktion	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
Sinusfunktion	$\sin(x)$	$\cos(x)$	
Cosinusfunktion	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
Tangensfunktion	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$x \neq (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ mit $n \in \mathbb{N}$
Cotangensfunktion	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -\left(1 + \cot^2(x)\right)$	$x \neq n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{N}$

Kurvendiskussion

Als Kurvendiskussion bezeichnet man eine analytische Untersuchung einer gegebenen Funktion, um anhand charakteristischer Eigenschaften auf ihren Verlauf schließen zu können.

Dabei geht man, unabhängig von der Art der Funktion, immer nach einem im Wesentlichen gleichen Schema vor. Dieses Schema soll im Folgenden anhand der Beispielfunktion $f(x) = \frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{5 \cdot x}$ im Detail vorgestellt werden.

1.: Bestimmung des Definitionsbereichs

Zunächst muss überprüft werden, für welche x-Werte die Funktion definiert ist; beispielsweise muss ausgeschlossen werden können, dass durch Null dividiert wird.

Die x-Werte dürfen zudem nicht außerhalb des Definitionsbereichs der jeweiligen Funktion liegen, beispielsweise muss darauf geachtet werden, dass die Argumente von Wurzel- oder Logarithmusfunktionen nicht negativ werden. *Potenzfunktionen* der Form $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, *ganzrationale Funktionen*, *Exponentialfunktionen* sowie die *Sinus- und Cosinusfunktion* sind für alle reelle Zahlen definiert, bei ihnen gilt also $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Der Definitionsbereich einer zusammengesetzten Funktion ist gleich der Schnittmenge der Definitionsbereiche aller Teilfunktionen.

- *Beispiel:*

  Die Funktion $f(x) = \frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{2 \cdot x}$ hat an der Stelle $x = 0$ eine Definitionslücke, da für diesen Wert der Nenner der Funktion gleich Null wird. Für alle anderen x-Werte ist die Funktion definiert, es ist also $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.: Bestimmung des Verhaltens an den Rändern des Definitionsbereichs

Sofern der Definitionsbereich der zu untersuchenden Funktion es zulässt, werden als nächstes die *Grenzwerte* der Funktion für unendlich große positive und negative x-Werte untersucht. Bei Wurzel- und Logarithmusfunktionen allerdings kann beispielsweise nur der Grenzwert für unendlich große positive x-Werte bestimmt werden, da diese beiden Funktionstypen nur für positive reelle Zahlen definiert sind.

Hat die Funktion Definitionslücken, so sind auch die Grenzwerte der Funktion an diesen Stellen zu bestimmen.

- *Beispiel:*

  Die Funktion $f(x) = \frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{2 \cdot x}$ geht für sehr große positive x-Werte gegen Unendlich, da in diesem Fall sowohl der Zähler wie auch der Nenner positive Werte annehmen, aber der Zähler schneller wächst als der Nenner. Es gilt also:

  $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{2 \cdot x} \right) = +\infty$$

  Für sehr große negative x-Werte geht die Funktion gegen minus Unendlich, da in diesem Fall die höchste Potenz des Zählers einen positiven Wert, der Nenner aber einen negativen Wert liefert, und der Zähler schneller wächst als der Nenner. Es gilt also:

  $$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{2 \cdot x} \right) = -\infty$$

Die Funktion hat zudem $x = 0$ als Definitionslücke. Um die Grenzwerte für $x \rightarrow 0$ zu berechnen, kann man folgenden Trick nutzen: An jeder Stelle $x \neq 0$ kann im Funktionsterm x gekürzt werden, da x als gemeinsamer Faktor in jedem Zählerterm enthalten ist. Somit gilt:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{2 \cdot x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x \right) = 0$$

Sowohl für sehr kleine negative wie für sehr kleine positive x-Werte gehen alle Terme beim betrachteten Grenzwert gegen Null. Da der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert identisch sind, ist die Funktion "stetig behebbar": Man könnte die Funktion abschnittsweise mit $f(x) = 0$ für $x = 0$ und $f(x) = \frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{2 \cdot x}$ für $x \neq 0$ definieren, um eine "nahtlose" Funktion zu erhalten, die für alle reellen Zahlen definiert ist.

Die Regel von L'Hospital

In manchen Fällen erhält man bei der Bestimmung des Grenzwerts an einer Definitionslücke x_0 ein nicht bestimmtes Ergebnis, beispielsweise bei der Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$. Diese Funktion hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine Definitionslücke, da der Nenner an dieser Stelle den Wert Null annimmt; gleichzeitig ist allerdings auch der Zähler $f_1(x) = \sqrt{x}$ an dieser Stelle gleich Null. In derartigen Fällen, wenn sich ein Grenzwert der Form $\frac{\text{“0”}}{\text{“0”}}$ ergibt, kann die sogenannte "Regel von L'Hospital" angewendet werden:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\text{“0”}}{\text{“0”}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$$

Für das oben genannte Beispiel $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x}$ gilt:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \\ f_2'(x) &= \ \left(x^1 \right)' \ = 1 \end{aligned}$$

Für die Stelle $x_0 = 1$ gilt somit $\frac{f_1'(1)}{f_2'(1)} = \frac{1}{1} = 1$, der Grenzwert der Funktion für $x \rightarrow x_0$ ist also gleich 1.

Haben also zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ an einer Stelle x_0 beide den Grenzwert 0, so besagt die Regel von L'Hospital, dass in diesem Fall der Grenzwert gleich dem Quotienten der Ableitungen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist, sofern beide Funktionen differenzierbar sind und die Ableitung der Nennerfunktion an der Stelle x_0 nicht gleich Null ist.

Die Regel von L'Hospital kann ebenfalls angewendet werden, wenn $\lim_{x \to \infty} f_1(x) = \lim_{x \to \infty} f_2(x) = 0$ ist:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\text{“0”}}{\text{“0”}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$$

Weiterhin gilt die Regel von L'Hospital auch, wenn die Grenzwerte von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ beide für $x \to x_0$ oder $x \to \pm\infty$ gegen Unendlich gehen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\text{``}\infty\text{''}}{\text{``}\infty\text{''}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\text{``}\infty\text{''}}{\text{``}\infty\text{''}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$$

Die Regel von L'Hospital ist somit in vielen Fällen nützlich, wenn ein Grenzwert auf andere Weise nicht bestimmt werden kann.

3.: Untersuchung auf Symmetrie

Eine Funktion ist achsensymmetrisch zur x-Achse, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle x-Werte des Definitionsbereichs gilt. Dies ist der Fall, wenn alle im Funktionsterm auftretenden Potenzen gerade sind.

Eine Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung $(0,0)$, wenn $-f(-x) = f(x)$ für alle x-Werte des Definitionsbereichs gilt. Dies ist der Fall, wenn alle im Funktionsterm auftretenden Potenzen ungerade sind.

Enthält eine Funktion Terme mit sowohl geraden wie auch ungeraden Exponenten, liegt keine Symmetrie vor.

- *Beispiel:*

  Die Funktion $f(x) = \frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{2 \cdot x}$ hat Terme mit sowohl geraden wie auch ungeraden Exponenten, sie ist somit nicht symmetrisch.

4.: Bestimmung von Nullstellen

Als *Nullstellen* bezeichnet man diejenigen x-Werte, deren zugehörige Funktionswerte gleich Null sind, für die also $f(x) = 0$ gilt.

- *Beispiel:*

  Bei der Funktion $f(x) = \frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{2 \cdot x}$ als gebrochen-rationaler Funktion entsprechen die Nullstellen den Nullstellen des Zählers. Es muss somit geprüft werden, für welche x-Werte der Term $x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2$ gleich Null ist, also folgende Gleichung gelöst werden:

  $$x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 = 0$$

  Auf der linken Seite kann x^2 als gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden. Es folgt:

  $$x^2 \cdot \left(x^2 - 3 \cdot x^1 + 2\right) = 0$$

  Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist. Es wäre somit $x = 0$ eine Nullstelle des Zählers, doch dieser Wert ist nicht in der Definitionsmenge der Funktion enthalten. Zu untersuchen bleibt, für welche x-Werte der zweite Faktor $x^2 - 3 \cdot x + 2$ gleich Null wird:

$$x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gelöst werden. Mit $a = 1$, $b = -3$ und $c = 2$ folgt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (1 \cdot 2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Die Funktion hat also die zwei Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_1 = 2$.

5.: Bestimmung von Extremstellen

Bei der Untersuchung von *Extremstellen* wird geprüft, für welche x-Werte der Funktionsgraph Hochpunkte, Tiefpunkte oder Terrassenpunkte besitzt. Hierzu muss die erste Ableitung der Funktion bestimmt und gleich Null gesetzt werden. Um zu prüfen, um welchen Extremstellen-Typ es sich handelt, kann man zu jeder Extremstelle x_0 einen etwas kleineren und einen etwas größeren x-Wert in die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$ einsetzen und aus den erhaltenen Steigungswerten den Krümmungsverlauf betrachten: Beispielsweise bedeutet eine erst positive und dann negative Steigung einen Hochpunkt an der Stelle x_0.

Eine zweite Möglichkeit zur Bestimmung des Nullstellentyps bietet die zweite Ableitungsfunktion $f''(x)$. Da man diese für eine Bestimmung der Wendepunkte ohnehin berechnen muss, kann man dies auch gleich an dieser Stelle tun und die x-Werte der Extremstellen einsetzen. Ergibt sich für eine Stelle x_0 ein positiver Wert, so handelt es sich um einen Tiefpunkt, ergibt sich ein negativer Wert, so handelt es sich um einen Hochpunkt. Ergibt sich der Wert Null, so handelt es sich um einen Terrassenpunkt.[1]

Die zu den Extremstellen gehörenden Funktionswerte erhält man durch Einsetzen in die ursprüngliche Funktion $f(x)$.

- *Beispiel:*

  Für $x \neq 0$ kann die Funktion $f(x) = \frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{2 \cdot x}$ als $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x)$ geschrieben werden. Die erste Ableitung dieser Funktion lautet:

  $$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \big(3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2\big)$$

  Diese (Ableitungs-)Funktion ist gleich Null, wenn der Term $3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2$ gleich Null ist:

  $$3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2 = 0$$

[1] Als einfache Merkregel kann man an die Normalparabel $f(x) = x^2$ denken. Deren erste Ableitung ist $f'(x) = 2 \cdot x$, die zweite Ableitung ist $f''(x) = 2$. Die Normalparabel hat einen Tiefpunkt bei $x_0 = 0$, wobei der Wert der zweiten Ableitung an dieser Stelle positiv ist.

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gelöst werden. Mit $a = 3$, $b = -6$ und $c = 2$ folgt:

$$x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (3 \cdot 2)}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$$

Die Funktion besitzt also die zwei Extremstellen $x_3 \approx 0,42$ und $x_4 \approx 1,58$. Um zu überprüfen, um welche Art von Extremstellen es sich handelt, wird die zweite Ableitung berechnet:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot x - 6)$$

Für $x_3 \approx 0,42$ ergibt sich beim Einsetzen ein Wert kleiner als Null, die Funktion hat an dieser Stelle also einen Hochpunkt. Für $x_4 \approx 1,58$ ergibt sich beim Einsetzen ein Wert größer als Null, die Funktion hat an dieser Stelle also einen Tiefpunkt.

Ein Einsetzen von x_3 und x_4 in die Funktion $f(x)$ ergibt die zugehörigen Funktionswerte $f(x_3) \approx 0,19$ und $f(x_4) \approx -0,19$.

6.: Bestimmung von Wendepunkten

Bei der Untersuchung hinsichtlich *Wendepunkten* wird geprüft, für welche x-Werte die zweite Ableitung der Funktion gleich Null ist. Hat man eine (oder mehrere) solche Stelle x_0 gefunden, kann man anschließend durch Einsetzen eines etwas kleineren und eines etwas größeren x-Werts in die zweite Ableitungsfunktion $f''(x)$ prüfen, ob die jeweiligen Ergebnisse ein unterschiedliches Vorzeichen besitzen. In diesem Fall handelt es sich tatsächlich um einen Wendepunkt, andernfalls nicht.

- *Beispiel:*

  Für $x \neq 0$ kann die Funktion $f(x) = \frac{x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{2 \cdot x}$ als $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x)$ geschrieben werden. Die zweite Ableitung dieser Funktion lautet:

  $$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot x - 6)$$

  Setzt man diese Funktionsgleichung gleich Null, so erhält man $6 \cdot x - 6 = 0$ oder $x = 1$ als einzige Wendestelle des Funktionsgraphen.

  Dass es sich tatsächlich um eine Wendestelle handelt, kann durch Einsetzen beispielsweise der Werte $x = 0$ und $x = 2$ in die zweite Ableitung $f''(x)$ überprüft werden: Es ist $f''(0) = -3$ und $f''(2) = 3$, die Krümmung ändert also bei $x = 1$ ihr Vorzeichen, somit hat der Funktionsgraph dort eine Wendestelle.

  Setzt man $x = 1$ in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ ein, erhält man $f(1) = 0$. Die Funktion hat also einen Wendepunkt bei $(1, 0)$.

7.: Erstellung eines Funktionsgraphen

Die bis zu diesem Schritt im Rahmen der Kurvendiskussion erarbeiteten Ergebnisse reichen grundsätzlich aus, um den Verlauf des Funktionsgraphen qualitativ richtig zeichnen zu können; ergänzend können bei Bedarf einige weitere x-Werte in die Funktion $f(x)$ eingesetzt werden, um weitere Punkte des Funktionsgraphen zu erhalten.

- *Beispiel:*

  Bei der Funktion $f(x) = \frac{x^4-3\cdot x^3+2\cdot x^2}{2\cdot x}$ sind nach den vorherigen Rechenschritten die Nullstellen, Extrem- und Wendestellen sowie das Verhalten im Unendlichen bekannt. Der Funktionsgraph sieht damit etwa so aus:

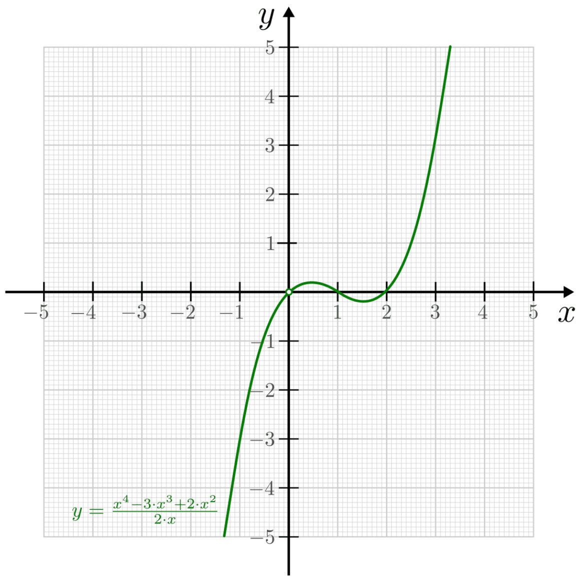


Abb. 136: Funktionsgraph der Beispielfunktion $y = \frac{x^4-3\cdot x^3+2\cdot x^2}{2\cdot x}$.

Das genannte Schema für Kurvendiskussionen lässt sich allgemein für beliebige Kombinationen elementarer Funktionen anwenden.

Extremwertaufgaben

Ein häufiger Anwendungsfall der Differentialrechnung sind so genannte Extremwertaufgaben. Bei diesem Aufgabentyp wird zunächst eine Funktionsgleichung aufgestellt, welche die gesuchte Größe als Variable enthält. Wird die erste Ableitung dieser Funktionsgleichung gebildet und diese gleich Null gesetzt, so erhält man eine oder mehrere Stellen, für welche die gesuchte Größe minimal oder maximal ist.

Beispiel:

- Mit $l = 100\,\text{m}$ Zaunlänge soll ein rechteckiges Flächenstück mit möglichst großem Flächeninhalt A eingezäunt werden. Welche Länge l beziehungsweise Breite b muss das eingezäunte Stück haben?

  Die Fläche des eingezäunten Rechtecks kann als $A = l \cdot b$ geschrieben werden. Der Umfang kann als $2 \cdot b + 2 \cdot l$ ausgedrückt werden und soll gleich $100\,\text{m}$ sein. Es gelten also folgende zwei Bedingungen:

$$A = l \cdot b = \max$$

$$2 \cdot l + 2 \cdot b = 100\,\mathrm{m} \quad \Longleftrightarrow \quad b = 50\,\mathrm{m} - l$$

Setzt man die nach b aufgelöste zweite Gleichung in die erste Gleichung ein, so erhält man eine Funktionsgleichung, die als Variable die gesuchte Länge l enthält:

$$A = l \cdot b = l \cdot (50 - l) = -l^2 + 50\,\mathrm{m} \cdot l$$

Um die ideale Länge l_0 zu bestimmen, wird die Flächenfunktion $A(l)$ einmal nach der Variablen l abgeleitet. Diese Ableitung kann dann gleich Null gesetzt werden:

$$A' = -2 \cdot l + 50\,\mathrm{m} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow l = 25\,\mathrm{m}$$

Damit ist auch $b = 50\,\mathrm{m} - l = 25\,\mathrm{m}$. Der Flächeninhalt A beträgt bei dieser Aufteilung $(25\,\mathrm{m})^2 = 625\,\mathrm{m}^2$.

Die Herausforderung bei Extremwertaufgaben liegt in der mathematischen Formulierung der Bedingungen, aus deren Kombination sich eine mathematische Funktion mit der gesuchten Variablen aufstellen lässt. Die Bestimmung der Extremwerte erfolgt dann stets nach dem gleichen Prinzip.

Integralrechnung

Um Flächen zu bestimmen, die von krummlinigen Funktionsgraphen und der x-Achse eingeschlossen werden, entwickelte der Mathematiker Bernhard Riemann die Integralrechnung. Der Grundgedanke hinter den so genannten "Riemann-Summen" ist, dass sich jede derartige Fläche in eine Vielzahl von schmalen Rechtecken zerlegen lässt, wobei die Grundseiten aller Rechtecke auf der x-Achse liegen und die Höhen der Rechtecke durch die Funktionswerte an den jeweiligen Stellen gegeben sind. Die Summe der Flächen aller Rechtecke ergibt dann die Fläche zwischen dem Funktionsgraph und der x-Achse.

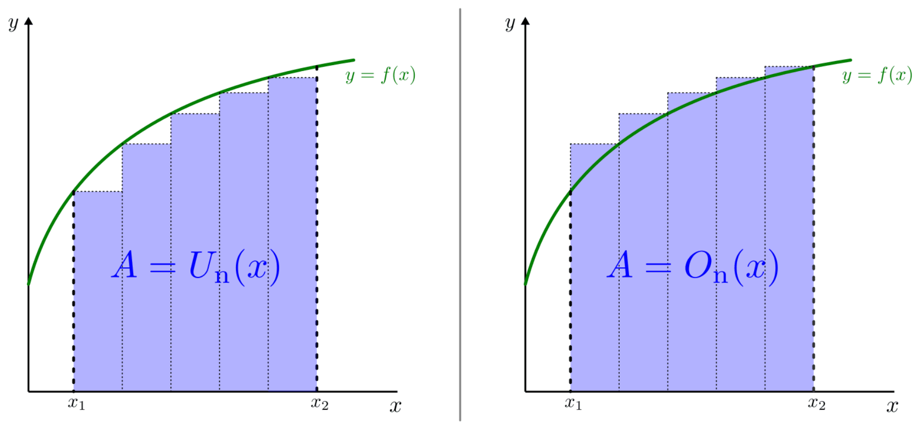


Abb. 137: Untersumme und Obersumme als Näherungen für den Flächeninhalt zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse.

Je nachdem, ob man als Höhe jedes Rechtecks jeweils den kleineren oder größeren der Funktionswerte beider Randpunkte wählt, füllen die Rechtecke die Fläche unterhalb des

Funktionsgraphen entweder nicht ganz aus, oder sie ragen stets an einer Seite über den Funktionsgraphen hinaus. Die Summen der so gewählten Rechteck-Flächen werden dementsprechend als Untersumme U bzw. Obersumme O bezeichnet. Für n Unterteilungen mit einer Breite von jeweils Δx gilt:

$$U_{\mathrm{n}}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{\mathrm{i-1}}) \cdot \Delta x$$
$$O_{\mathrm{n}}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{\mathrm{i}}) \cdot \Delta x$$

Für die Fläche $A_{[\mathrm{x_1;x_2}]}\,(f(x))$ unterhalb des Funktionsgraphen f zwischen den zwei Punkten x_1 und x_2 gilt somit:[1]

$$U_{\mathrm{n}}(x) \;\le\; A_{[\mathrm{x_1;x_2}]}\,(f(x)) \;\le\; O_{\mathrm{n}}(x)$$

Unterteilt man bei einer beliebigen Funktion den Bereich zwischen x_1 und x_2 in eine größere Zahl an schmaleren Rechtecken, so lassen sich die Abweichungen der einzelnen Rechteckshöhen von den jeweiligen Funktionswerten verringern und damit die Werte der Unter- und Obersumme angleichen. Bei einer (theoretischen) Unterteilung in unendlich viele, dafür beliebig schmale Rechtecke haben die Unter- und Obersumme den gleichen Grenzwert, der mit der gesuchten Fläche $A_{[\mathrm{x_1;x_2}]}\,(f(x))$ identisch ist.

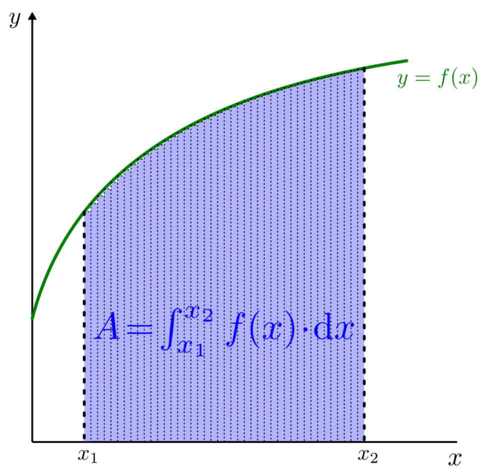


Abb. 138: Integral als Riemann-Summe für infinitessimal kleine Unterteilungen von $[x1; x2]$.

Mathematisch wird die Annäherung der Ober- und Untersumme bei unendlich vielen, infinitessimal kleinen Unterteilungen durch das so genannte Integralzeichen $\int$ anstelle von $\sum$ gekennzeichnet. Zudem wird anstelle von Δx für die Breite jedes einzelnen Rechtecks $\mathrm{d}x$ geschrieben:

$$\lim_{n\to\infty} U_{\mathrm{n}}(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} O_{\mathrm{n}}(x)$$

Der Ausdruck $\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \mathrm{d}x$ wird dabei Integral von $f(x)$ über $[x_1; x_2]$ genannt. Die Funktion $f(x)$ wird als Integrand und x_1 bzw. x_2 als Integrationsgrenzen bezeichnet.

[1] Das Gleichheitszeichen in der obigen Gleichung gilt nur für konstante y-Werte, also Funktionen der Form $y = f(x) = \mathrm{konst.}$

Integrierbarkeit und Stammfunktion

Ein Integral $\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$ einer Funktion $f(x)$ über das Intervall $[a; b]$ lässt sich immer dann eindeutig berechnen, wenn die Funktion *stetig* ist, der Funktionsgraph also keine Sprünge aufweist. Das gleiche gilt für bereichsweise definierte Funktionen, die in den einzelnen Bereichen Stetigkeit aufweisen und *beschränkt* sind, also keine Unendlichkeitsstellen besitzen. Jede Funktion, die diese Bedingung erfüllt, wird integrierbar genannt.

Der Wert eines Integrals $\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x$ lässt sich am einfachsten berechnen, wenn man zur gegebenen Funktion $f(x)$ eine so genannte "Stammfunktion" $F(x)$ findet. Eine solche Stammfunktion hat die Eigenschaft, dass ihre erste Ableitung $F'(x)$ gerade der ursprünglichen Funktion $f(x)$ entspricht. Als Zusammenhang zwischen der Stammfunktion und der zu integrierenden Funktion gilt für alle $x \in [a; b]$ also:

$$F'(x) = f(x) \tag{132}$$

Die Integration kann also als Umkehrung der Differentiation angesehen werden. Während jedoch das Ableiten einer Funktion stets ein eindeutiges Ergebnis liefert, ist die Bestimmung der Stammfunktion nicht eindeutig: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist jede Funktion $F(x) + C$ mit einer additiven Konstante $C \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion von $f(x)$, da ein konstanter Term beim Ableiten stets den Wert Null ergibt. Die Gesamtheit aller Stammfunktionen wird "unbestimmtes Integral" genannt und mittels $\int f(x) \cdot \mathrm{d}x$, also ohne konkrete Integrationsgrenzen geschrieben.

Anfangsbedingung und Integralfunktion

Aus der Menge aller Stammfunktionen soll üblicherweise eine bestimmt werden, die durch einen gegebenen Punkt $P(x_1, y_1)$ verläuft. Eine solche Forderung nennt man Anfangsbedingung.

Soll das Integral von einer festen Grenze a bis zu einer variablen Grenze x verlaufen, so ist das Integral gleich Null, wenn $x = a$ ist, da in diesem Fall keine Fläche aufgespannt wird. Die Anfangsbedingung besteht somit darin, dass die Stammfunktion an der Stelle $x = a$ eine Nullstelle aufweisen muss. Es muss also gelten:

$$F(a) + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -F(a)$$

Dieser Gedanke folgt daraus, dass man $F(x) = \int_a^x f(x) \cdot \mathrm{d}x$ als so genannte Integralfunktion interpretiert, die jeweils den Wert des Integrals liefert, wenn die untere Grenze a und die oberen Grenze x entspricht. Mit der obigen Anfangsbedingung erhält man somit als Wert für das bestimmte Integral über die Funktion $f(x)$ von a bis $x = b$:

$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{133}$$

Als Kurzschreibweise ist hierbei $F(x)\big|_{\mathrm{a}}^{b} := F(x) - F(a)$ üblich. Möchte man das Integral über eine Funktion $f(x)$ zwischen zwei bestimmten Grenzen a und b berechnen, so genügt es also, die Stammfunktion zu bestimmen, die Werte a und b in die Stammfunktion einzusetzen und die Differenz beider Werte zu berechnen:

$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x = F(x)\big|_{\mathrm{a}}^{b} = F(b) - F(a) \tag{134}$$

Die Schwierigkeit bei der Integralrechnung besteht folglich darin, eine Stammfunktion $F(x)$ zur gegebenen Funktion $f(x)$ zu finden.

Grundintegrale

Von den elementaren Funktionen sowie einigen Kombinationen dieser Funktionen gibt es unmittelbare Lösungsformeln zur Bestimmung der jeweiligen Stammfunktion.

Integralregeln für Potenz- und Wurzelfunktionen

- Ist die Funktion $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine konstante Funktion, so gilt für die Stammfunktion $F(x)$:

  $$f(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = c \cdot x + C \tag{135}$$

  Anschaulich entspricht der Wert von $c \cdot x$ der Fläche des Rechtecks mit der Breite c, das zwischen der konstanten Funktion und der x-Achse liegt und die Länge x hat.

- Ist die Funktion $f(x) = x^n$ eine allgemeine *Potenzfunktion* mit der Einschränkung $n \neq -1$, so gilt für die Stammfunktion $F(x)$:

  $$f(x) = x^n \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{136}$$

  Dieses Ergebnis folgt daraus, dass die Ableitung der Funktion x^{n+1} dem Term $(n+1) \cdot x^n$ entspricht. Die ursprüngliche Funktion $f(x) = x^n$ unterscheidet sich lediglich um den Faktor $\frac{1}{n+1}$ von diesem Ableitungsterm.

  Ist beispielsweise $n = 1$, also $f(x) = x$, so ist $F(x) = \frac{x^2}{2}$ eine Stammfunktion. Anschaulich entspricht der Term $\frac{1}{2} \cdot x^2$ der Fläche eines Dreiecks, das zwischen dem Graphen $f(x) = x$ und der x-Achse liegt; diese Fläche ist gleich der Hälfte der Quadratfläche von $f(x) \cdot x = x \cdot x = x^2$.

  Integrale von linearen Funktionen treten in den Naturwissenschaften häufig auf, beispielsweise gilt für die zurückgelegte Wegstrecke s bei einer Bewegung mit konstanter Beschleunigung $v = a \cdot t \iff s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + s_0$, wobei in diesem Fall die Integrationsvariable die Zeit t ist. Weitere Beispiele sind die Bewegungs- und Spannenergie, usw.

  Die obige Integrationsregel (136) gilt wegen des Zusammenhangs $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ auch für *Wurzelfunktionen*. Beispielsweise gilt im Fall $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ mit $n = \frac{1}{2}$:

  $$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \iff \quad F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{3}$$

- Ist $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ mit $x \neq 0$, so ist eine Anwendung der obigen Regel (136) nicht möglich. Für diesen Sonderfall gilt vielmehr folgender Zusammenhang:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) = \ln(x) + C$$

Die Stammfunktion der *Hyperbelfunktion* $f(x) = \frac{1}{x}$ ist also die natürliche *Logarithmusfunktion* $F(x) = \ln(x)$.[2]

Integralregeln für Exponentialfunktionen

- Ist $f(x) = e^x$ mit $e = 2.7182\ldots$ als Eulerscher Zahl, so gilt für die Stammfunktion $F(x)$:

$$f(x) = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) = e^x + C \tag{137}$$

Ebenso wie die natürliche Exponentialfunktion beim Ableiten unverändert bleibt, so bleibt sie auch beim Integrieren unverändert.

- Ist $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$, so gilt für die Stammfunktion $F(x)$:

$$f(x) = a^x \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x \tag{138}$$

Auch die allgemeine Exponentialfunktion ergibt beim Integrieren wieder eine Exponentialfunktion, wobei der Vorfaktor $\frac{1}{\ln(a)}$ berücksichtigt werden muss.

Integralregeln für trigonometrische Funktionen und Arcusfunktionen

- Ist $f(x) = \sin(x)$, so gilt für die Stammfunktion $F(x)$:

$$f(x) = \sin(x) \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) = -\cos(x) + C \tag{139}$$

Dieser Zusammenhang ergibt sich daraus, dass die *Ableitung der Cosinusfunktion* der negativen Sinusfunktion entspricht.

- Ist $f(x) = \cos(x)$, so gilt für die Stammfunktion $F(x)$:

$$f(x) = \cos(x) \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) = +\sin(x) + C \tag{140}$$

Dieser Zusammenhang ergibt sich daraus, dass die *Ableitung der Sinusfunktion* der Cosinusfunktion entspricht.

[2] Auch in diesem Fall ist die Integration die Umkehrung der Differentiation, denn die *Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion* $f(x) = \ln(x)$ ist gerade $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Zusammenfassung wichtiger Integrationsregeln

Für jedes Integral gelten folgende Eigenschaften:

- Vertauscht man die obere und die untere Integrationsgrenze, so ändert das Integral sein Vorzeichen:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \mathrm{d}x = - \int_{x_2}^{x_1} f(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{141}$$

  Der Grund dafür liegt darin, dass hierbei die Breiten aller Rechtecke $\mathrm{d}x_{\mathrm{i}} = (x_{\mathrm{i+1}} - x_{\mathrm{i}})$ für $x_{\mathrm{i+1}} < x_{\mathrm{i}}$ ein negatives Vorzeichen bekommen und somit bei der Auswertung des Integrals über gleich große, aber negative Werte summiert wird.

- Ist die obere Integrationsgrenze x_2 gleich der unteren Grenze x_1, so ist das Integral für jede beliebige Funktion $f(x)$ gleich Null:

$$\int_{x_1}^{x_1} f(x) \cdot \mathrm{d}x = 0 \tag{142}$$

  Anschaulich lässt sich dies dadurch erklären, dass die Fläche zwischen x_1 und x_1 eine Breite von Null hat.

- Jedes Integral lässt sich auf folgende Weise in zwei Teilintegrale zerlegen:

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} f(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{143}$$

  Ist $x_1 < x_2 < x_3$, so ist umittelbar einleuchtend, dass die Fläche zwischen x_1 und x_3 gleich der Summe der Teilflächen sein muss, da sich das Intervall $[x_1; x_3]$ in zwei Teilintegrale $[x_1; x_2] \cup [x_2; x_3]$ zerlegen lässt und die entsprechenden Teilsummen gebildet werden können.

  Die Regel gilt jedoch auch dann, wenn x_2 außerhalb von $[x_1; x_3]$ liegt; ist beispielsweise $x_2 > x_3$, so wird die – gegenüber dem Gesamtintegral – mit dem ersten Teilintervall zusätzlich addierte Fläche aufgrund der Vorzeichenregel (141) durch das zweite (negative) Teilintegral wieder subtrahiert.

- Lässt sich eine zu integrierende Funktion als Summe zweier Funktion f_1 und f_2 darstellen, so ist das Ergebnis gleich der Summe der Integrale beider Funktionen:

$$\int_{x_1}^{x_2} \big(f_1(x) + f_2(x)\big) \cdot \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{144}$$

  Die obige Regel entspricht formal dem *Distributivgesetz*.

- Lässt sich eine zu integrierende Funktion als Produkt einer Funktion $f(x)$ und eines konstanten Faktors c darstellen, so kann dieser vor das Integral gezogen werden:

$$\int_{x_1}^{x_2} c \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x = c \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{145}$$

  Die obige Regel entspricht dem *Assoziativgesetz* der Multiplikation. Anschaulich kann man sich jeden Funktionswert und damit die Höhe aller zu addierenden Rechtecke um den Faktor c gestreckt denken.

- Erfüllen zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für jeden beliebigen Wert x innerhalb des Intervalls $[x_1; x_2]$ die Bedingung $f_1(x) < f_2(x)$, so gilt:

$$f_1(x) < f_2(x) \text{ für alle } x \in [x_1; x_2] \quad \Leftrightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) < \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)$$

Bestimmung der Fläche zwischen zwei Graphen

Mittels der Integralrechnung kann nicht nur die Fläche zwischen einem Funktionsgraph und der x-Achse, sondern auch die zwischen zwei Funktionsgraphen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in einem Intervall $[a; b]$ eingeschlossene Fläche berechnet werden. Verläuft der Graph von $f_2(x)$ oberhalb des Graphen von $f_1(x)$, gilt also $f_2(x) > f_1(x)$ für alle $x \in [a; b]$, so entspricht die gesuchte Fläche folgendem Integral:[3]

$$\int_a^b f_2(x) \cdot \mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big) \cdot \mathrm{d}x \tag{146}$$

Schneiden sich Schnittpunkte zweier Funktionen, so müssen zunächst die *Schnittstellen* berechnet werden; anschließend kann einzeln von Schnittstelle zu Schnittstelle integriert werden. In jedem einzelnen Teilintervall wird dabei die Funktion mit den niedrigeren Funktionswerten von der Funktion mit den höheren Funktionswerten subtrahiert.

Integrationsmethoden

In vielen Fällen, insbesondere bei zusammengesetzten Funktionen, lässt sich eine Integration nicht mittels der oben genannten *Grundintegrale* durchführen. In solchen Fällen können allerdings oftmals weitere Integrationsmethoden angewendet werden.

Partielle Integration

Die Methode der partiellen Integration entspricht formal einer umgekehrten Anwendung der *Produktregel* bei Ableitungen:

$$\int_a^b f_1(x) \cdot f_2'(x) = \Big(f_1(x) \cdot f_2(x)\Big)\Big|_{\mathrm{a}}^{b} - \int_a^b f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{147}$$

Diese Methode kann immer dann genutzt werden, wenn die zu integrierende Funktion als Produkt zweier Teilfunktionen geschrieben werden kann. Lässt sich eine dieser Funktionen leicht integrieren, so setzt man diese als $f_2'(x)$; die andere Teilfunktion, die sich möglichst leicht ableiten lassen sollte, wird als $f_1(x)$ gesetzt. Das Integral kann dann berechnet werden, indem man zunächst als Zwischenergebnis das Produkt von $f_1(x)$ und der Stammfunktion von $f_2'(x)$ bildet, die obere und untere Integrationsgrenze als x-Werte einsetzt und beide Werte voneinander subtrahiert. Anschließend muss das Integral $\int_a^b f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot \mathrm{d}x$ berechnet werden und dessen Wert vom Zwischenergebnis subtrahiert werden.

[3] Formal ist Gleichung (146) zur Berechnung der Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen mit Gleichung (144) als Distributivgesetz der Integralrechnung identisch.

Die Methode der partiellen Integration wird insbesondere dann verwendet, wenn eine der beiden Teilfunktionen eine Potenzfunktion x^n mit $n \in \mathbb{N}$ ist. Bei einer derartigen Funktion ist die n-te Ableitung ein konstanter Wert, der beim Integrieren gemäß Gleichung (145) als konstanter Faktor vor das Integral gezogen werden kann. Gegebenenfalls muss folglich die Methode der partiellen Integration wiederholt angewendet werden (maximal n mal), um die jeweils auf der rechten Seite stehenden (Teil-)Integrale der Form $\int_a^b f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot \mathrm{d}x$ schrittweise zu berechnen.

Integration durch Substitution

Die Methode der Integration durch Substitution entspricht formal einer umgekehrten Anwendung der *Kettenregel* bei Ableitungen:

$$\int f_1\big(f_2(x)\big) \cdot f_2'(x) \cdot \mathrm{d}x = \int f_1(z) \cdot \mathrm{d}z$$

Hierbei wurde $z = f_2(x)$ geschrieben. Man kann mit dieser Substitution nach einer Stammfunktion $F_1(z)$ von $f_1(z)$ suchen, in gleicher Weise als würde man lediglich z anstelle von x schreiben und somit eine Stammfunktion $F_1(x)$ zu $f_1(x)$ suchen. Hat man eine solche Stammfunktion $F_2(z)$ gefunden, so genügt es, bei dieser Stammfunktion wiederum z durch den Ausdruck $f_2(x)$ zu ersetzen.

Möchte man mit dieser Methode ein bestimmtes Integral von a bis b berechnen, so müssen allerdings auch die Integralgrenzen umgerechnet werden. Es gilt:

$$\int_a^b f_1\big(f_2(x)\big) \cdot f_2'(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{f_2(a)}^{f_2(b)} f_1(z) \cdot \mathrm{d}z$$

Da $f_2(x)$ bekannt ist, müssen lediglich die Integrationsgrenzen in diese Funktion eingesetzt werden, um die neuen Integrationsgrenzen zu erhalten.

Integrale der Form $\int \frac{f'(x)}{f(x)}$

Soll das Integral einer zusammengesetzten Funktion berechnet werden, deren Zähler der Ableitung des Nenners entspricht, so kann folgende Regel verwendet werden:

$$\int \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right) \cdot \mathrm{d}x = \ln\left(|f(x)|\right) + C$$

Hat die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a;b]$ keine Nullstelle, so gilt für das bestimmte Integral über $f(x)$ von a bis b:

$$\int_a^b \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right) \cdot \mathrm{d}x = \ln\left(|f(x)|\right)\Big|_{\mathrm{a}}^{b}$$

Weitere Integrale können Integraltabellen entnommen werden, beispielsweise Integraltabelle (HS Esslingen).

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Lineare Algebra und analytische Geometrie

In der analytischen Geometrie geht es darum, Objekte der *elementaren Geometrie* mit rechnerischen Methoden zu beschreiben. Beispielsweise lassen sich Punkte mittels zwei beziehungsweise drei Werten als Koordinaten beschreiben, Geraden und Ebenen entsprechend als Mengen solcher Werte; es lassen sich somit auch die Rechenregeln der *elementaren Algebra* nutzen.

Die Abgrenzung zur *Analysis* besteht darin, dass dort geometrische Darstellungen genutzt werden, um Funktionen zu veranschaulichen, während in der analytischen Geometrie geometrische Formen der Ausgangspunkt für rechnerische Untersuchungen sind.

Vektoren

Darstellung von Vektoren

Bei Vektoren handelt es sich aus geometrischer Sicht um *Strecken* mit einer bestimmten Länge, die sowohl eine bestimmte Richtung, wie auch einen bestimmten Richtungssinn haben; dieser wird in Zeichnungen durch Pfeil am Ende der Strecke hervorgehoben. In der Formelschreibweise werden Vektoren meist mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet und durch einen Pfeil über der Vektorgröße markiert.

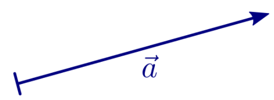


Abb. 139: Darstellung eines Vektors.

Je nachdem, ob zwei- oder dreidimensionale geometrische Formen untersucht werden, reicht ein geordnetes Paar aus zwei oder ein Tupel aus drei Koordinatenwerten – also $(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}})$ beziehungsweise $(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$ – aus, um einen Vektor $\vec{a}$ vollständig zu charakterisieren.[1] Die einzelnen Koordinatenwerte ("Komponenten") geben dabei an, um wie

[1] Vektoreigenschaften lassen sich so verallgemeinern, dass in der algebraischen Geometrie allgemein auch Vektoren mit n Dimensionen behandelt werden können.

viele Längeneinheiten die Spitze des Vektors entlang der jeweiligen Raumrichtung vom Anfangspunkt des Vektors entfernt liegt.

$$\vec{a} = (a_{\mathrm{x}}\,,\, a_{\mathrm{y}}\,,\, a_{\mathrm{z}}) = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} \tag{148}$$

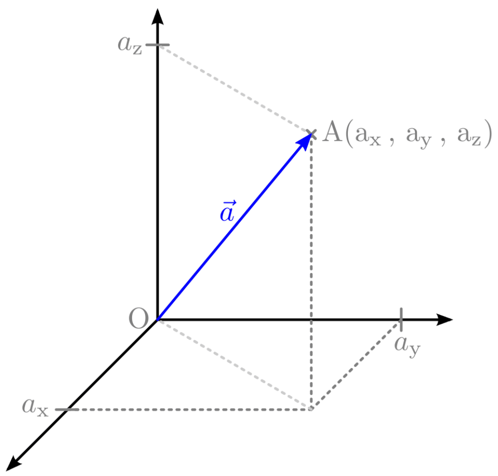


Abb. 140: Darstellung eines (dreidimensionalen) Ortsvektors in einem Koordinatensystem.

Ein Vektor, dessen Anfangspunkt dem Ursprung des Koordinatensystems $\vec{0} = (0\,,\,0\,,\,0)$ entspricht, wird als Ortsvektor bezeichnet. Jeder Punkt eines Raumes kann durch einen zugehörigen Ortsvektor eindeutig charakterisiert werden.

Betrag eines Vektors

Die Länge der Verbindungsstrecke vom Anfangspunkt eines Vektors $\vec{a}$ zu seinem Endpunkt wird Betrag des Vektors genannt. In Kurzform schreibt man dafür $|\vec{a}|$ oder a (ohne Vektorpfeil).

Der Betrag eines Vektors kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras folgendermaßen anhand seiner Komponenten a_{x} und a_{y} (und a_{z} bei dreidimensionalen Vektoren) berechnet werden:

$$\begin{aligned} a = |\vec{a}\,| &= \sqrt{a_{\mathrm{x}}^2 + a_{\mathrm{y}}^2} && \text{für zweidimeinsionale Vektoren} \\ a = |\vec{a}\,| &= \sqrt{a_{\mathrm{x}}^2 + a_{\mathrm{y}}^2 + a_{\mathrm{z}}^2} && \text{für dreidimeinsionale Vektoren} \end{aligned} \tag{149}$$

Beispiele:

- Der zweidimensionale Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat folgenden Betrag:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_{\mathrm{x}}^2 + a_{\mathrm{y}}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

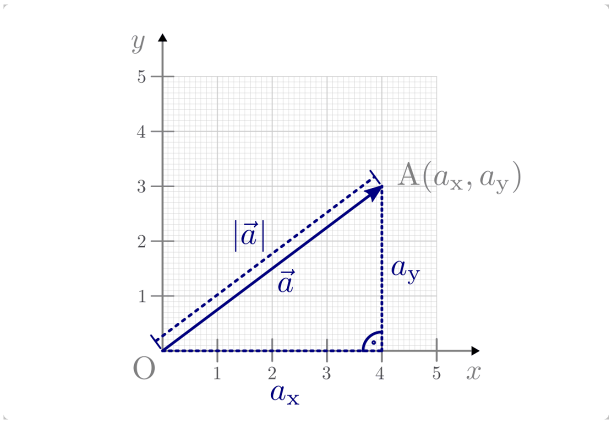


Abb. 141: Betrag eines (zweidimensionalen) Vektors.

- Der dreidimensionale Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat folgenden Betrag:

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{45}$$

Vektor und Gegenvektor

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{a}$ sind gleich, wenn sie in allen Koordinaten übereinstimmen. Beide Vektoren haben dann den gleichen Betrag, die gleiche Richtung und den gleichen Richtungssinn. Sie können allerdings von unterschiedlichen Anfangspunkten ausgehen und daher parallel zueinander im Raum verschoben sein, da für Vektoren stets nur die Differenz der Koordinatenwerte von Anfangspunkt und Endpunkt von Bedeutung ist.

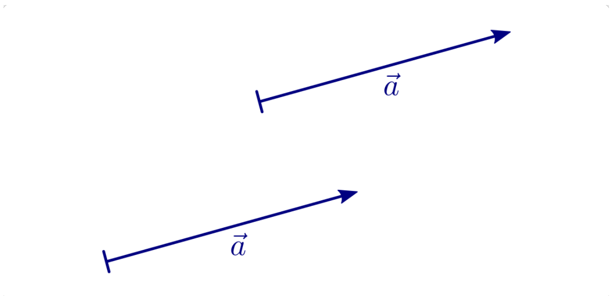


Abb. 142: Zwei identische Vektoren.

Das Negative $-\vec{a}$ eines Vektors a, auch "Gegenvektor" genannt, ist ein Vektor mit gleichem Betrag und gleicher Richtung wie $\vec{a}$, jedoch mit umgekehrtem Richtungssinn.

In der Komponentenschreibweise kann der zu einem Vektor $\vec{a}$ gehörende Gegenvektor $-\vec{a}$ gebildet werden, indem man alle Komponenten von $\vec{a}$ mit einem Minuszeichen versieht:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix} \tag{150}$$

Bei zweidimensionalen Vektoren wird die dritte Komponente $a_z = 0$ weggelassen.

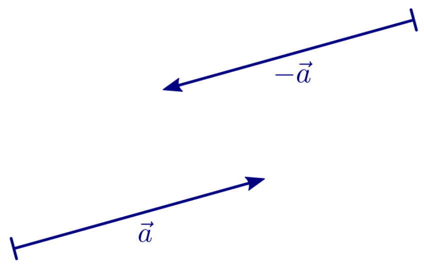


Abb. 143: Vektor und Gegenvektor.

Normvektor und Nullvektor

Ein Vektor, dessen Länge genau einer Längeneinheit (1 LE) entspricht, wird "normierter" Vektor $\vec{a}_0$ genannt.

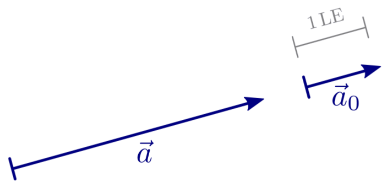


Abb. 144: Normvektor $\vec{a}_0$ eines Vektors $\vec{a}$

Ein Vektor mit Betrag Null wird als Nullvektor $\vec{0}$ bezeichnet. Bei einem Nullvektor sind Anfangs- und Endpunkt identisch.

Addition und Subtraktion von Vektoren

Ein Vektor kann durch Beibehalten seiner Richtung und seines Richtungssinns, also parallel im Raum verschoben werden, ohne dass sich die Werte seiner Komponenten ändern. Dies kann genutzt werden, um zwei Vektoren zeichnerisch zu addieren beziehungsweise subtrahieren.

Der Summenvektor

Fügt man an einen Vektor $\vec{a}$ einen zweiten Vektor $\vec{b}$ durch eine passende Verschiebung (Translation) so an, dass der Anfangspunkt des zweiten Vektors mit dem Endpunkt des ersten Vektors übereinstimmt, dann erhält man den Summenvektor $\overrightarrow{a+b}$, indem man den Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkt des zweiten Vektors verbindet.

Rechnerisch erhält man den Summenvektor, indem man die einzelnen Komponenten beider Vektoren addiert:

$$\overrightarrow{a+b} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{x}} + b_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} + b_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} + b_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} \qquad (151)$$

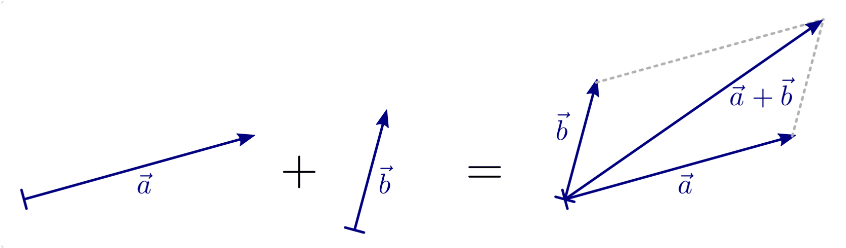


Abb. 145: Summenvektor der beiden Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$.

Eine Addition von Vektoren mit unterschiedlicher Dimension ist nicht definiert.

Der Differenzvektor

Die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ zweier Vektoren lässt sich zeichnerisch auf ähnliche Weise bestimmen, indem man den Gegenvektor $-\vec{b}$ des zweiten Vektors zum ersten Vektor addiert.

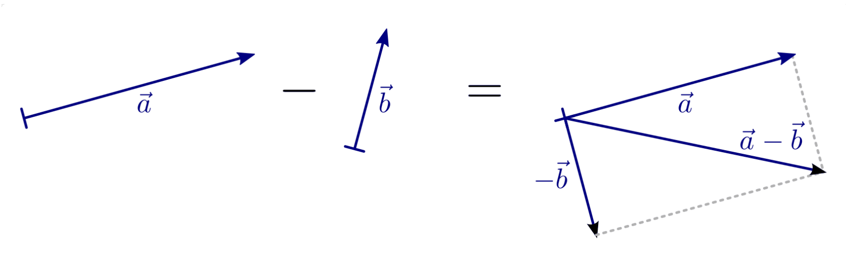


Abb. 146: Differenzvektor der beiden Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$.

Rechnerisch erhält man den Differenzvektor, indem man die einzelnen Komponenten beider Vektoren subtrahiert:

$$\overrightarrow{a-b} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{x}} - b_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} - b_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} - b_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} \tag{152}$$

Multiplikation von Vektoren

Vektoren können entweder mit einer reellen Zahl (einem so genannten "Skalar") als auch mit anderen Vektoren multipliziert werden.

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Multipliziert man einen Vektor $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl c, so ergibt sich ein Vektor, der die gleiche Richtung und den gleichen Richtungssinn hat, dessen Betrag jedoch um den Faktor c verändert ist.

- Ist $c > 1$, so wird der Vektor gestreckt.

- Ist $0 < c < 1$, so wird der Vektor gestaucht.
- Ist $c < 0$, so wird zusätzlich zur Streckung beziehungsweise Stauchung des Vektors der Richtungssinn umgedreht.

Diese Form der Vektor-Multiplikation wird oftmals auch "S-Multiplikation" genannt.

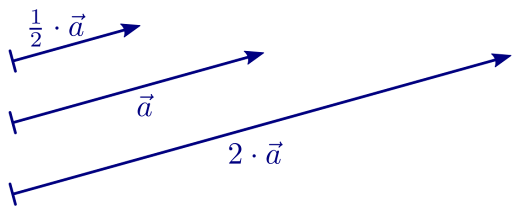


Abb. 147: Produkt eines Vektors mit einem Skalar (Faktoren: $c = \frac{1}{2}$ beziehungsweise $c = 2$).

Rechnerisch lässt sich ein Vektor $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl c multiplizieren, indem jede Komponente des Vektors mit dieser Zahl multipliziert wird:

$$c \cdot \vec{a} = c \cdot \begin{pmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{\mathrm{x}} \\ c \cdot a_{\mathrm{y}} \\ c \cdot a_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} \tag{153}$$

Multipliziert man einen Vektor $\vec{a}$ mit der Zahl 1, so bleibt er unverändert; es gilt also stets:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \tag{154}$$

Multipliziert man einen Vektor $\vec{a}$ hingegen mit dem Kehrwert seines Betrags $\frac{1}{|\vec{a}|}$, so erhält man den zugehörigen, auf eine Längeneinheit (1 LE) normierten Vektor $\vec{a}_0$:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{155}$$

Zusätzlich gelten bezüglich der Multiplikation von Skalaren mit Vektoren das *Assoziativ-* und *Distributivgesetz*:

$$(c_1 \cdot c_2) \cdot \vec{a} = c_1 \cdot (c_2 \cdot \vec{a}) \tag{156}$$

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2) \cdot \vec{a} &= c_1 \cdot \vec{a} + c_2 \cdot \vec{a} \\ c \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= c \cdot \vec{a} + c \cdot \vec{b} \end{aligned} \tag{157}$$

Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{a}$ ist definiert als das Produkt ihrer Beträge $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$, multipliziert mit dem Cosinus des zwischen ihnen eingeschlossenen Winkels α:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos{(\alpha)} \tag{158}$$

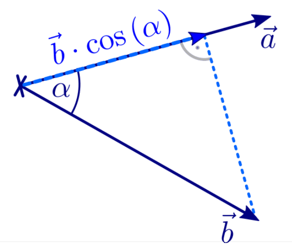


Abb. 148: Anschauliche Interpretation eines Skalarprodukts.

Schreibt man die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Spaltenform, so kann das Skalarprodukt komponentenweise nach folgender Formel berechnet werden:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} \\ &= a_{\mathrm{x}} \cdot b_{\mathrm{x}} + a_{\mathrm{y}} \cdot b_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{z}} \cdot b_{\mathrm{z}} \end{aligned} \tag{159}$$

Das Ergebnis ist ein skalarer Wert, also eine Zahl. Die Bedeutung des Skalarprodukts wird schnell deutlich, wenn man sich einige Sonderfälle betrachtet:

- Stehen die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander, so ist $\cos(\alpha) = \cos(90°) = 0$. Somit ergibt das Skalarprodukt in diesem Fall den Wert Null:

  $$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

  Mit Hilfe dieser Beziehung kann einerseits leicht gepüeft werden, *ob* zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen. Andererseits kann bei einem Vektor $\vec{a}$ mit nur zwei gegebenen Komponenten unter Verwendung der komponentenweisen Darstellung die dritte Komponente so bestimmt werden, dass der Vektor auf dem zweiten Vektor $\vec{b}$ senkrecht steht.

  Beispiel:

  Die dritte Komponente des Vektors $\vec{a} = (2, 6, ?)$ soll so bestimmt werden, dass er auf dem Vektor $\vec{b} = (3, -5, 6)$ senkrecht steht. Somit muss gelten:

  $$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-5) + \, ? \cdot 6 &= 0 \\ \Rightarrow 6 \cdot \, ? &= 24 \\ ? &= 4 \end{aligned}$$

  Ist die gesuchte Komponente somit gleich 4, so stehen beide Vektoren senkrecht aufeinander.

- Stehen die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel zueinander, so ist $\cos(\alpha) = \cos(0°) = 1$. Das Skalarprodukt ist in diesem Fall gleich dem Produkt der Beträge beider Vektoren.

  $$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Dieser Zusammenhang wurde implizit bereits verwendet, um den Betrag eines bestimmten Vektors $\vec{a}$ zu berechnen. Setzt man nämlich $\vec{a} = \vec{b}$, so gilt:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Der Betrag $|\vec{a}|$ des Vektors kann somit bestimmt werden, indem man das Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst bildet und aus dem Ergebnis die Quadratwurzel zieht. Schreibt man die obige Gleichung komponentenweise, so erhält man die übliche Betrags-Gleichung (149).

- Für beliebige Winkel α lässt sich das Produkt $b \cdot \cos(\alpha)$ geometrisch als "Projektion" des Vektors b auf den Vektor a deuten. Die Projektion entspricht dabei anschaulich dem "Schattenwurf" des Vektors $\vec{b}$, der sich bei einer senkrecht auf $\vec{a}$ einfallenden Beleuchtung ergeben würde.

  Der Wert des Skalarprodukts ist damit im Allgemeinen gleich dem Betrag des ersten Vektors, multipliziert mit der senkrechten Projektion des zweiten Vektors auf den ersten.

Da das Skalarprodukt komponentenweise einfach zu berechnen ist, kann es auch genutzt werden, um den Winkel zwischen zwei Vektoren oder einem Vektor und einer der Achsen eines (kartesischen) Koordinatensystems zu berechnen. Für den Winkel zwischen zwei Vektoren gilt nämlich aufgrund von Gleichung (158):

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ \Rightarrow \alpha &= \operatorname{acos}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) \end{aligned}$$

Um den Winkel zu berechnen, muss man somit nur das Skalarprodukt berechnen und dieses durch das Produkt beider Vektor-Beträge dividieren; der Arcus-Cosinus dieses Werts ergibt den gesuchten Winkel.

Um den Winkel zwischen eines Vektors und den einzelnen Raumachsen zu berechnen, kann man diese ebenfalls durch Vektoren der Länge 1 und mit je nur einer einzigen Vektorkomponente dargestellt werden kann, beispielsweise die x-Achse durch den Vektor $e_{\mathrm{x}} = (1, 0, 0)$. Man erhält damit:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}} &= \begin{pmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a_{\mathrm{x}} \cdot 1 + a_{\mathrm{y}} \cdot 0 + a_{\mathrm{z}} \cdot 0 = a_{\mathrm{x}} \end{aligned}$$

Gleiches gilt auch für die Skalarprodukte von $\vec{a}$ mit den beiden anderen Raumachsen. Die allgemeine Formel (158) des Skalarprodukts kann damit nach dem gesuchten Winkel α aufgelöst werden:

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}} = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}_{\mathrm{x}}| \cdot \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_{\mathrm{x}}|}$$

Setzt man $\vec{a} \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}} = a_{\mathrm{x}}$ und $|\vec{e}_{\mathrm{x}}| = 1$ in die obige Gleichung ein, so folgt:[2]

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_{\mathrm{x}}|} = \frac{a_{\mathrm{x}}}{|\vec{a}|}$$

Für die Winkel α, β, γ zwischen $\vec{a}$ und den x, y, z-Achsen gilt somit:

$$\alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{a_{\mathrm{x}}}{|\vec{a}|}\right) \quad ; \quad \beta = \operatorname{acos}\left(\frac{a_{\mathrm{y}}}{|\vec{a}|}\right) \quad ; \quad \gamma = \operatorname{acos}\left(\frac{a_{\mathrm{z}}}{|\vec{a}|}\right) \tag{160}$$

Das Vektorprodukt

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt einen Vektor, der auf jedem der beiden Vektoren und senkrecht steht. Diese Definition ist erst ab einem dreidimensionalen Raum sinnvoll.

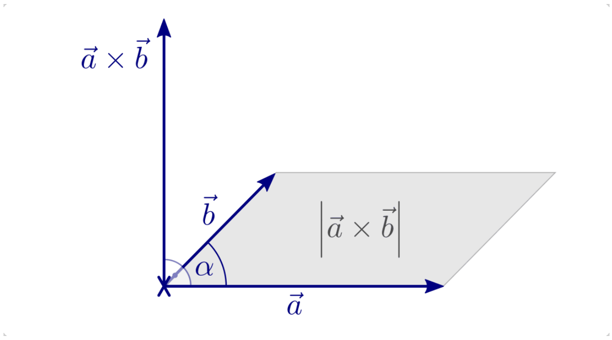


Abb. 149: Anschauliche Interpretation eines Vektorprodukts.

Der Betrag des Vektorprodukts zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich dem Produkt ihrer Beträge $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$, multipliziert mit dem Sinus des zwischen ihnen eingeschlossenen Winkels α:

$$|\vec{a} \times \vec{a}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha \tag{161}$$

Schreibt man die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{a}$ in Spaltenform, so kann das Vektorprodukt komponentenweise nach folgender Formel berechnet werden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{y}} \cdot b_{\mathrm{z}} - a_{\mathrm{z}} \cdot b_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \cdot b_{\mathrm{x}} - a_{\mathrm{x}} \cdot b_{\mathrm{z}} \\ a_{\mathrm{x}} \cdot b_{\mathrm{y}} - a_{\mathrm{y}} \cdot b_{\mathrm{x}} \end{pmatrix} \tag{162}$$

Das Vektorprodukt findet Anwendung in der analytischen Geometrie und in der Technik. Beispielsweise kann zu zwei gegebenen Richtungsvektoren, die eine Ebene beschreiben, mit Hilfe des Vektorprodukts ein dritter "Normvektor" gefunden werden, der auf der Ebene senkrecht steht. In der Physik wird das Vektorprodukt beispielsweise bei der Berechnung von Drehmomenten und Drehimpulsen genutzt.

[2] Der Betrag des Vektors $\vec{e}_{\mathrm{x}}$ ist gleich Eins, da $|\vec{e}_{\mathrm{x}}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$ gilt.

Strecken und Geraden

Jeder Punkt P eines kartesischen Koordinatensystems kann mittels seines *Ortsvektors*, also mittels seiner x-, y- und z-Koordinaten eindeutig dargestellt werden.

Betrachet man mehrere Punkte mit unterschiedlichen Ortsvektoren, so lassen sich auch die Strecken zwischen den einzelnen Punkten mittels (normaler) Vektoren darstellen. Die Vektorrechung kann somit unmittelbar auf die Beschreibung von Strecken und Geraden angewendet werden.

Strecken und Teilverhältnisse

Bezeichnet man die zu zwei Punkten A und B gehörenden Ortsvektoren mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so ist die Verbindung zwischen diesen beiden Punkten durch den so genannten "Verschiebungsvektor" $\vec{v}$ charakterisiert:

$$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$$

Die einzelnen Koordinaten des Verbindungsvektors erhält man, indem man die Koordinaten des Ausgangspunkts von den Koordinaten des Endpunkts subtrahiert:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{x}} \\ v_{\mathrm{y}} \\ v_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{B_x} - \mathrm{A_x} \\ \mathrm{B_y} - \mathrm{A_y} \\ \mathrm{B_z} - \mathrm{A_z} \end{pmatrix} \tag{163}$$

Im zweidimensionalen Fall entfällt die dritte Koordinate.

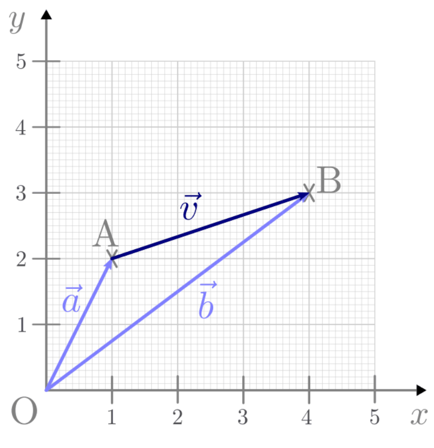


Abb. 150: Darstellung einer (zweidimensionalen) Strecke mittels Vektoren.

Mittels des Verschiebungsvektors $\vec{v}$ gelangt man vom Punkt A zum Punkt B, indem man diesen zum Ortsvektor des Punktes A addiert:

$$\vec{a} + \vec{v} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}$$

Eine Strecke lässt sich somit wahlweise durch die Angabe zweier Punkte (beziehungsweise deren Ortsvektoren) oder auch durch Angabe eines Ortsvektors sowie des Verschiebungsvektors $\vec{v}$ beider Punkte beschreiben:

$$\overline{\mathrm{AB}} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} \tag{164}$$

Der Faktor $0 \le \lambda \le 1$ ist notwendig, da eine Strecke die Menge *aller* Punkte zwischen den zwei Endpunkten darstellt; dies ist äquivalent dazu, dass man zum Ausgangspunkt einen *beliebigen* Bruchteil (kleiner oder gleich 1) des Verschiebungsvektors hinzu addiert.

Der Faktor λ selbst wird "Linearfaktor" genannt: Er gibt als reiner Zahlenwert ("Skalar") an, um welchen Faktor der mit ihm multiplizierte Vektor skaliert, also gestaucht beziehungsweise gestreckt wird. Ist der Wert von λ negativ, so wird die Richtung des mit ihm multiplizierten Vektors umgekehrt.

$$\begin{aligned}
|\lambda| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Stauchung} \\
|\lambda| > 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Streckung}
\end{aligned}$$

Beispiel:

- In der obigen Abbildung hat der Punkt A die Koordinaten (1; 2) und der Punkt B die Koordinaten (4; 3). Wie lässt sich die Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ mittels zweier Vektoren darstellen?

  Der Verschiebungsvektor $\vec{v}$ zwischen A und B ergibt sich aus der Differenz der beiden Ortsvektoren:

  $$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Mit dem Punkt A als Ausgangspunkt erhält man damit folgende Darstellung der Verbindungslinie zwischen A und B:

  $$\overline{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Auch hier muss wiederum $0 \le \lambda \le 1$ gelten.

Das Teilverhältnis

Für die folgenden Überlegungen wird wiederum eine Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ betrachtet, die durch einen Punkt auf ihr liegenden Punkt T in zwei Abschnitte unterteilt wird.

Das so genannte "Teilverhältnis" $\lambda^* > 0$ gibt dabei an, in welchem Verhältnis T die Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ teilt:

$$\lambda^* = \overline{\mathrm{AT}} : \overline{\mathrm{TB}} \tag{165}$$

Der Wertebereich von λ^* liegt zwischen Null und Unendlich:

- Ist der Teilpunkt T identisch mit dem Punkt A, so ist $\lambda^* = 0$.
- Halbiert der Teilpunkt T die Strecke $\overline{\text{AB}}$, so ist $\lambda^* = 1$.
- Nähert sich der Teilpunkt T zunehmend dem Punkt B, so geht der Wert des Teilverhältnisses λ^* gegen Unendlich. Für $\text{T} = \text{B}$ ist das Teilverhältnis nicht definiert.

Kennt man die Koordinaten der Punkte A und B sowie das Teilverhältnisses λ^* so ergeben sich folgende Streckenlängen für $\overline{\text{AT}}$ beziehungsweise $\overline{\text{TB}}$:

$$\begin{aligned}\overline{\text{AT}} &= \left|\frac{\lambda^*}{\lambda^* + 1}\right| \cdot \overline{\text{AB}} \\ \overline{\text{TB}} &= \left|\frac{1}{\lambda^* + 1}\right| \cdot \overline{\text{AB}}\end{aligned} \tag{166}$$

Beispiel:

- Eine Strecke hat die Endpunkte $\text{A} = (1;\, 1)$ und $\text{B} = (9;\, 7)$. Wie weit ist der Punkt T, der die Strecke $\overline{\text{AB}}$ im Verhältnis $2:1$ teilt, von A entfernt?

  Um zu bestimmen, wie weit der Punkt T von A entfernt ist, muss die Länge der Strecke $\overline{\text{AT}}$ bestimmt werden. Dies ist mittels der obigen Formel möglich, wenn man zunächst die Länge der Strecke $\overline{\text{AB}}$ berechnet:

  $$\overline{\text{AB}} = \left|\overline{0\text{B}} - \overline{0\text{A}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

  Mit dem Teilungsverhältnis $\lambda^* = 2 : 1 = 2$ ergibt sich gemäß der obigen Formel für die Länge der Strecke $\overline{\text{AT}}$:

  $$\overline{\text{AT}} = \left|\frac{\lambda^*}{\lambda^* + 1}\right| \cdot \overline{\text{AB}} \;=\; \frac{2}{2+1} \cdot 10 \;\approx\; 6{,}67$$

  Der Teilpunkt T auf der Strecke $\overline{\text{AB}}$ ist somit rund $6{,}67$ Längeneinheiten vom Punkt A entfernt.

Koordinaten des Teilpunktes

Ausgehend vom Punkt A gelangt man zum Teilpunkt T, indem man $\lambda = \frac{\lambda^*}{\lambda^*+1}$ in die Streckengleichung (164) einsetzt.
Umgekehrt gelangt man vom Punkt B zum Teilpunkt T, indem man $\lambda' = -\frac{1}{\lambda^*+1}$ in die Streckengleichung einsetzt:

Für den Zum Teilpunkt T gehörenden Ortsvektor $\overline{\text{OT}}$ gilt somit:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OT}} &= \vec{a} + \left(\frac{\lambda^*}{\lambda^* + 1}\right) \cdot \vec{v} \\ \overrightarrow{\text{OT}} &= \vec{b} - \left(\frac{1}{\lambda^* - 1}\right) \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

Setzt man in die erste der beiden obigen Gleichungen $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}} &= \vec{a} + \left(\frac{\lambda^*}{\lambda^*+1}\right) \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) \\ &= \vec{a} + \left(\frac{\lambda^*}{\lambda^*+1}\right) \cdot \vec{b} - \left(\frac{\lambda^*}{\lambda^*+1}\right) \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

Um die rechte Seite der Gleichung weiter vereinfachen zu können, kann man $\vec{a} = 1 \cdot \vec{a}$ schreiben und $1 = \frac{\lambda^*+1}{\lambda^*+1}$ setzen; so erhalten alle Terme den gleichen (Haupt-)Nenner und können somit zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}} &= \left(\frac{\lambda^*+1}{\lambda^*+1}\right) \cdot \vec{a} + \left(\frac{\lambda^*}{\lambda^*+1}\right) \cdot \vec{b} - \left(\frac{\lambda^*}{\lambda^*+1}\right) \cdot \vec{a} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda^*+1}\right) \cdot \vec{a} + \left(\frac{\lambda^*}{\lambda^*+1}\right) \cdot \vec{b} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda^*+1}\right) \cdot \left(\vec{a} + \lambda^* \cdot \vec{b}\right)\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile der obigen Gleichung wurde das *Distributivgesetz für Vektoren* genutzt und die hintere Klammer ausmultipliziert; in der mittleren Zeile wurde dann die Identität $\vec{a} = 1 \cdot \vec{a}$ genutzt und $1 = \frac{\lambda^*+1}{\lambda^*+1}$ gesetzt, um die additiv beziehungsweise subtraktiv verknüpften Terme auf einen Hauptnenner bringen zu können.

Für die Komponenten des Teilpunktes gilt somit:

$$\mathrm{T} = \left(\frac{1}{\lambda^*+1}\right) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{A_x} + \lambda^* \cdot B_{\mathrm{x}} \\ \mathrm{A_y} + \lambda^* \cdot B_{\mathrm{y}} \\ \mathrm{A_z} + \lambda^* \cdot B_{\mathrm{z}} \end{pmatrix}$$

Für den Mittelpunkt T_{M} einer Strecke gilt insbesondere $\lambda^* = 1$, und somit

$$\mathrm{T_M} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{A_x} + B_{\mathrm{x}} \\ \mathrm{A_y} + B_{\mathrm{y}} \\ \mathrm{A_z} + B_{\mathrm{z}} \end{pmatrix}$$

Geraden in einer Ebene

Eine Gerade g kann, ebenso wie eine Strecke, mittels eines Punktes A beziehungsweise dessen Ortsvektors $\vec{a}$ und eines "Richtungsvektors" $\vec{v}$ dargestellt werden:

$$g = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} \tag{167}$$

In diesem Fall kann für $\lambda \in \mathbb{R}$ allerdings ein beliebig großer, gegebenenfalls auch negativer Zahlenwert gewählt werden.

Bei der Bezeichnung von Geraden wird der Richtungspfeil weggelassen, da eine Gerade keinen eindeutigen Richtungssinn hat; bei g handelt es sich vielmehr um die Menge aller Punkte, welche die zugehörige Gleichung erfüllen.

Soll eine Gerade durch zwei Punkte A und B festgelegt werden, so so entspricht der Richtungsvektor $\vec{v}$ wiederum dem Verschiebungsvektor (163) beider Punkte.

... to be continued ...

Matrizen

Bei einer Matrix handelt es sich um eine rechteckige Anordnungen mehrerer Zahlen. Hat eine Matrix m Zeilen und n Spalten, so sagt man, die Matrix sei vom Typ $(m; n)$. Eine solche Matrix hat allgemein folgende Gestalt:

$$\underline{A}_{(m;\,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

In der Literatur werden Matrizen häufig auch durch fettgedruckte Großbuchstaben bezeichnet, in der Praxis werden die Großbuchstaben hingegen üblicherweise unterstrichen. Die in einer Matrix $\underline{A}$ stehenden Zahlen werden allgemein Elemente oder Komponenten a_{ij} der Matrix genannt, wobei i den Zeilenindex (eine Zahl zwischen 1 und n) und j den Spaltenindex (eine Zahl zwischen 1 und n) bezeichnet. Schreibt man (a_{ij}) in runden Klammern, so ist damit die Gesamtheit aller Komponenten, also wiederum die ganze Matrix gemeint.

Spezielle Matrizen

Matrizen können sowohl hinsichtlich der Zahlenwerte ihrer Komponenten als auch hinsichtlich ihrer Form Besonderheiten aufweisen: Beispielsweise werden Matrizen, die ausschließlich Nullen als Werte enthalten, Nullmatrizen genannt. Andererseits können auch gewöhnliche Vektoren als spezielle Matrizen mit einer Spaltenzahl von $n = 1$ aufgefasst werden:

$$\vec{a} := \underline{A}_{(m;\,1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{\mathrm{m}} \end{pmatrix}$$

Matrizen, die hingegen nur eine Zeilenzahl von $m = 1$ haben, werden entsprechend Zeilenvektoren genannt:

$$\underline{A}_{(1;\,n)} = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$$

Ein Zeilenvektor, der die gleichen Elemente hat wie ein Spaltenvektor $\vec{a}$, wird häufig auch mit $\vec{a}^{\,\mathrm{T}}$ bezeichnet. Das hochgestellte T bedeutet dabei "transponiert". Allgemein kann zu jeder Matrix $\underline{A}$ eine transponierte Matrix $\underline{A}^{\mathrm{T}}$ gebildet werden, indem man die Zeilen und Spalten der Matrix vertauscht:

$$\underline{A}_{(m;\,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{A}^{\mathrm{T}}_{(n;\,m)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Beim Transponieren einer Matrix bleiben also nur diejenigen Komponenten unverändert, die auf der von links oben nach rechts unten verlaufenden "Hauptdiagonalen" liegen; alle anderen Einträge werden an dieser Diagonalen gespiegelt. Bleibt eine Matrix beim Transponieren unverändert, so nennt man sie symmetrisch.

Eine weitere Sonderstellung haben quadratische Matrizen, für deren Zeilen- wie auch Spaltenanzahl $m = n$ gilt. Für jede derartige Matrix $\underline{A}_{\,(n;\,n)}$ lässt sich eine so genannte Diagonalmatrix $\underline{D}_{\,(n;\,n)}$ angeben, bei der alle Komponenten, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, gleich Null sind:

$$\underline{A}_{\,(n;\,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{D}_{\,(n;\,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Eine Sonderform einer Diagonalmatrix ist eine so genannte Einheitsmatrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonalen den Wert 1 haben.

$$\underline{E}_{\,(n;\,n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Gleichheit zweier Matrizen liegt nur dann vor, wenn beide die gleiche Form haben und die Werte aller ihrer Komponenten identisch sind. Es muss also gelten:

$$\underline{A}_{\,(m;\,n)} = \underline{B}_{\,(m;\,n)} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \text{ für alle } i,\, j$$

Die Wirkungsweise von Matrizen auf geometrische Objekte wird im übernächsten Abschnitt beschrieben; im nächsten Abschnitt werden zunächst einige grundlegende Rechenregeln für den Umgang mit Matrizen vorgestellt.

Rechenregeln für Matrizen

Die wichtigsten Rechenoperationen für Matrizen sind die Addition zweier Matrizen sowie die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl, einem Vektor oder einer anderen Matrix. Die Rechenregeln für Matrizen basieren auf den üblichen *Grundrechenregeln* der Arithmetik; man muss diese lediglich in geordneter Weise auf "mehr" Zahlen angewenden.

Addition zweier Matrizen

Haben zwei Matrizen die gleiche Form, so können sie addiert beziehungsweise subtrahiert werden, indem die jeweils an gleicher Stelle stehenden Komponenten addiert beziehungsweise subtrahiert werden:

$$\underline{A}_{\,(m;\,n)} + \underline{B}_{\,(m;\,n)} = (a_{ij} + b_{ij})_{\,(m;\,n)} \text{ für alle } i,\, j$$

Das Resultat einer Addition beziehungsweise Subtraktion ist wiederum eine Matrix, welche die gleiche Form hat wie jede der beiden ursprünglichen Matrizen.

Beispiel:

- Welches Ergebnis liefert die Addition der folgenden beiden Matrizen?

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

  Bei der Matrizen-Addition werden die einzelnen Komponenten beider Matrizen addiert:

$$\begin{aligned} \underline{A} + \underline{B} &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 & -9 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4+(-4)) & ((-3)+\ \ 1) & (7+(-9)) \\ (2+(-1)) & (\ \ 9+(-7)) & (1+\ \ 2\ ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da die Addition beziehungsweise Subtraktion komponentenweise nach den gleichen Rechenregeln wie mit gewöhnlichen Zahlen erfolgt, gilt auch für die Addition beziehungsweise Subtraktion das *Kommutativ-* und *Assoziativgesetz* :

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A} \tag{168}$$

$$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} \tag{169}$$

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl

Die Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl (einem so genannten "Skalar") erfolgt ebenfalls komponentenweise: Jedes Element der Matrix $\underline{A}$ wird mit dem Wert des Skalars c multipliziert. Man kann also schreiben:

$$c \cdot \underline{A}_{\,(m;\,n)} = (c \cdot a_{ij})_{\,(m;\,n)} \text{ für alle } i,\ j$$

Das Resultat einer ist wiederum eine Matrix, welche die gleiche Form hat wie die ursprüngliche Matrix.

Beispiel:

- Welches Ergebnis erhält man, wenn man folgende Matrix mit $c = 4$ multipliziert?

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  Bei der Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl werden alle Komponenten der Matrizen mit dieser Zahl multipliziert:

$$c \cdot \underline{A} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 7 & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 0 & 4 \cdot \ \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 & -8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Auch für die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl gelten das *Kommutativ-* und *Assoziativgesetz*:

$$c \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot c \tag{170}$$

$$c_1 \cdot (c_2 \cdot \underline{A}) = (c_1 \cdot c_2) \cdot \underline{A} = c_1 \cdot c_2 \cdot \underline{A} \tag{171}$$

Zudem gilt das *Distributivgesetz* in gewohnter Form:

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2) \cdot \underline{A} = c_1 \cdot \underline{A} + c_2 \cdot \underline{A} \\ c \cdot (\underline{A} + \underline{B}) = c \cdot \underline{A} + c \cdot \underline{B} \end{aligned} \tag{172}$$

Multiplikation eines Zeilen- mit einem Spaltenvektor

Zur Herleitung einer Rechenregel für die Multiplikation zweier Matrizen wird zunächst von der skalaren Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor ausgegangen. Wie bei einem gewöhnlichen *Skalarprodukt zweier Vektoren* werden dabei die einzelnen Komponenten des Zeilen- und des Spaltenvektors miteinander multipliziert, und die sich dabei ergebenden Teilergebnisse schließlich summiert.

$$\vec{a}^{\,\mathrm{T}}_{(1;\,n)} \cdot \vec{b}_{(n,1)} = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{\mathrm{n}}) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{\mathrm{n}} \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_{\mathrm{n}} \cdot b_{\mathrm{n}} = \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} \cdot b_{\mathrm{i}} \tag{173}$$

Damit eines solches Produkt möglich ist, muss der Zeilenvektor ebenso viele Komponenten haben wie der Spaltenvektor. Das Ergebnis des Produkts ist dann eine gewöhnliche Zahl (ein Skalar).

Beispiel:

- Welches Ergebnis erhält man, wenn man den Zeilenvektor $\vec{a}^{\,\mathrm{T}} = (3,\, -5,\, 4)$ mit dem Spaltenvektor $\vec{b} = (-1\ \ +2,\, +1)$ multipliziert?

  $$\vec{a}^{\,\mathrm{T}} \cdot \vec{b} = (3,\, -5,\, 4) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = -9$$

  Das Produkt liefert somit den Wert $\vec{a}^{\,\mathrm{T}} \cdot \vec{b} = -9$

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Multipliziert man nun nicht nur einen Zeilenvektor mit n Komponenten, sondern eine n-spaltige Matrix mit einem Spaltenvektor der Länge n, so wird nach der obigen Regel

(173) für jede Zeile der Matrix ein Skalarprodukt mit dem Spaltenvektor gebildet. Hat die Matrix m Zeilen, so erhält man folglich m einzelne Ergebnisse. Diese werden als Komponenten in einen neuen Spaltenvektor der Länge m geschrieben.

$$\begin{array}{c|c} \underline{A} \cdot \vec{b} & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1\mathrm{i}} \cdot b_{\mathrm{i}} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2\mathrm{i}} \cdot b_{\mathrm{i}} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{mi}} \cdot b_{\mathrm{i}} \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiel:

- Welches Ergebnis erhält man, wenn man die folgende Matrix $\underline{A}$ mit dem folgenden Vektor $\vec{b}$ multipliziert?

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die Multiplikation der Matrix $\underline{A}$ mit dem Vektor $\vec{b}$ gilt nach obigem Schema:

$$\underline{A} \cdot \vec{b} = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + & 1 \cdot (-2) + & 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + & 2 \cdot (-2) + & 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 3 + & 1 \cdot (-2) + & (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Ein Produkt einer Matrix mit einem Vektor kann nur dann gebildet werden, wenn die Anzahl an Spalten der Matrix mit der Anzahl an Zeilen des Vektors übereinstimmt; andernfalls ist die Multiplikation nicht definiert.

Multiplikation zweier Matrizen

Beim so genannten "Falk-Schema", wie es in der obigen Abbildung dargestellt ist, werden die zu multiplizierenden Matrizen beziehungsweise Vektoren tabellenartig aufgelistet.[1] Die Auswertung erfolgt allgemein nach folgender Regel: Multipliziert man die i-te Zeile der linken Matrix mit der j-ten Spalter der rechten Matrix, so erhält man die Komponente der Ergebnis-Matrix, die dort in der i-ten Zeile und j-ten Spalte steht.

[1] Bisweilen werden beim Falk-Schema, um eine einfachere Textsatzung zu ermöglichen, entweder die Klammern der Matrizen oder die beiden zueinander senkrechten Tabellenlinien weggelassen.

Das Falk-Schema kann also einfach auf die Multiplikation zweier Matrizen ausgeweitet werden: Hierbei wird jeweils an der Stelle, wo sich eine Zeile der linken Matrix mit einer Spalte der rechten Matrix überkreuzt, das entsprechende Skalarprodukt eingetragen.

$$
\begin{array}{c|c}
\underline{A} \cdot \underline{B} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\mathrm{p}} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2\mathrm{p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\mathrm{n}1} & b_{\mathrm{n}2} & \cdots & b_{\mathrm{np}} \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \dots & a_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1\mathrm{i}} \cdot b_{1\mathrm{i}} & \sum_{i=1}^{n} a_{1\mathrm{i}} \cdot b_{2\mathrm{i}} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1\mathrm{i}} \cdot b_{\mathrm{pi}} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2\mathrm{i}} \cdot b_{1\mathrm{i}} & \sum_{i=1}^{n} a_{2\mathrm{i}} \cdot b_{2\mathrm{i}} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{2\mathrm{i}} \cdot b_{\mathrm{pi}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{mi}} \cdot b_{1\mathrm{i}} & \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{mi}} \cdot b_{2\mathrm{i}} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{mi}} \cdot b_{\mathrm{pi}} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Auch in diesem Fall ist das Produkt nur dann definiert, wenn die die Anzahl an Spalten der linken Matrix mit der Anzahl an Zeilen des Vektors übereinstimmt. Hat die linke Matrix die Form $(m;\, n)$ und die rechte Matrix die Form $(n;\, p)$, so erhält man als Ergebnis eine neue Matrix der Form $(m;\, p)$. Multipliziert man zwei quadratische Matrizen mit gleicher Zeilen- beziehungsweise Spaltenanzahl, so ist die Form der resultierenden Matrix mit der Form der beiden ursprünglichen Matrizen identisch.

Beispiel:

- Welches Ergebnis erhält man, wenn man die beiden folgenden Matrizen miteinander multipliziert?

  $$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

  Für die Multiplikation der beiden Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ gilt nach dem obigen Schema:

  $$
  \begin{array}{c|c}
  \underline{A} \cdot \underline{B} & \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
  \hline
  \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \left(2 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 \right) & \left(2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \right) \\ \left(0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 \right) & \left(0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 \right) \end{pmatrix}
  \end{array}
  $$

  $$\Rightarrow \underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Bedingung, dass bei der Multiplikation zweier Matrizen auf zueinander passende Spalten- und Zeilenanzahlen geachtet werden muss, zeigt bereits, dass bei diesem Rechenvorgang die Reihenfolge der Faktoren von Bedeutung ist:

- Multipliziert man eine Matrix der Form $(2;\, 3)$ mit einer Matrix der Form $(3;\, 2)$, so ergibt sich eine Matrix der Form $(2;\, 2)$.
- Multipliziert man eine Matrix der Form $(3;\, 2)$ mit einer Matrix der Form $(2;\, 3)$, so ergibt sich eine Matrix der Form $(3;\, 3)$.

Für die Multiplikation zweier Matrizen gilt folglich im Allgemeinen Kommutativgesetz der Multiplikation *nicht* :

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A} \tag{174}$$

Für die Multiplikation zweier Matrizen gilt allerdings das Assoziativgesetz:

$$(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \underline{C} \tag{175}$$

Auch das Distributivgesetz gilt für die Multiplikation zweier Matrizen in folgender Form:

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} \tag{176}$$

Zusätzlich gilt, dass bei jedem Produkt einer Matrix $\underline{A}$ mit einer entsprechenden Nullmatrix $\underline{0}$ wiederum eine Nullmatrix entsteht (da jedes einzelnen Skalarprodukt den Wert Null hat). Multipliziert man hingegen eine beliebige Matrix $\underline{A}$ mit einer Einheitsmatrix $\underline{E}$, so erhält man die ursprüngliche Matrix $\underline{A}$ als Ergebnis. Es gilt also (in diesem Fall sogar unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren):

$$\begin{gathered} \underline{A} \cdot \underline{0} = \underline{0} \cdot \underline{A} = \underline{0} \\ \underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{E} \cdot \underline{A} = \underline{E} \end{gathered} \tag{177}$$

Eine Division zweier Matrizen ist nicht definiert.

Wirkungsweise von Matrizen

Die Wirkungsweise von Matrizen lässt sich gut veranschaulichen, wenn man einzelne Vektoren in einem ebenen Koordinatensystem betrachtet und verschiedene Arten von Matrizen auf diese anwendet.

Da es in einem ebenen Koordinatensystem nur zweidimensionale Objekte gibt, benötigen die jeweiligen (Orts-)Vektoren nur zwei Komponenten (x und y); die für ein solches System relevanten Matrizen haben entsprechend ebenfalls nur (2×2) Komponenten.

Skalierungsmatrizen

Eine Skalierungsmatrix hat für ein zweidimensionales Koordinatensystem folgende Form:

$$\underline{A}_{\text{Ska}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{178}$$

Hierbei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Zahlenwert.

Multipliziert man eine derartige Matrix mit dem Ortsvektor eines Punktes, so erhält man als Resultat wiederum einen Ortsvektor mit gleicher Richtung; dessen Länge beträgt allerdings das λ-fache des ursprünglichen Ortsvektors.

Beispiele:

- Wird eine Skalierungsmatrix $\underline{A}_{\text{Ska}}$ mit $\lambda = 1$ mit einem Vektor multipliziert, so bleibt dieser unverändert. Dies soll am Beispiel des Punktes $\mathrm{P} = (3;\, 2)$ beziehungsweise des zugehörigen Ortsvektors $\vec{p} = \overrightarrow{0\mathrm{P}}$ gezeigt werden:

$$\underline{A}_{\text{Ska}} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{p}$$

  Der Vektor $\vec{p}$ wird somit durch die *Einheits-Matrix* nicht verändert.

- Wird eine Skalierungsmatrix $\underline{A}_{\text{Ska}}$ mit $\lambda = 2,5$ mit einem Vektor multipliziert, so wird dieser um den Faktor $2,5$ gestreckt. Dies soll am Beispiel eines Rechtecks gezeigt werden, dessen Eckpunkte folgende Koordinaten haben:

$$\mathrm{A} = \big(-2;\, -1\big) \quad \mathrm{B} = \big(\;\; 2;\, -1\big) \quad \mathrm{C} = \big(\;\; 2;\, +1\big) \quad \mathrm{D} = \big(-2;\, +1\big)$$

  Man kann sich die Wirkungsweise der Matrix beispielhaft anhand des Ortsvektors $\vec{c} = (2;\, 1)$ des Punktes C veranschaulichen:

$$\underline{A}_{\text{Ska}} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 2,5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \cdot 2 \\ 2,5 \cdot 1 \end{pmatrix} = 2,5 \cdot \vec{c}$$

  Die Koordinaten-Berechnung der übrigen neuen Punkte erfolgt nach dem gleichen Schema: Man erhält für jeden der Punkte einen Ortsvektor, der um einen Faktor $2,5$ gestreckt ist.

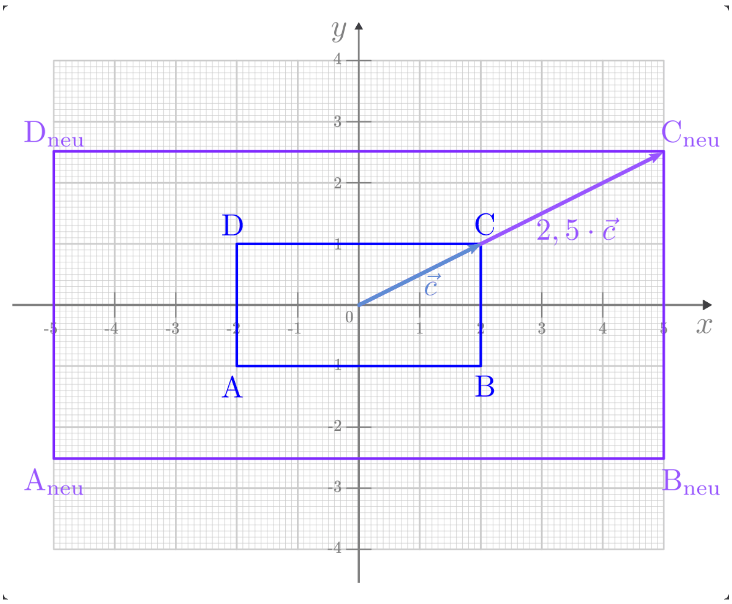


Abb. 151: Wirkungsweise einer Skalierungsmatrix.

Gilt für die Skalierungsgröße $0\lambda < 1$, so wird der Vektor beziehungsweise ein aus vielerlei Vektoren bestehendes geometrisches Objekt durch die Matrix originalgetreu verkleinert (gestaucht). Beispielsweise würde im obigen Beispiel ein Skalierungsfaktor von $\lambda = \frac{1}{3}$ eine Umkehrung der Skalierung mit dem Faktor 3 zur Folge haben.

Gilt für die Skalierungsgröße $\lambda < 0$, so wird jeder Ortsvektor, auf den die Matrix angewendet wird, nicht nur um den Faktor $|\lambda|$ skaliert, sondern es wird zusätzlich sein Vorzeichen vertauscht. Hierdurch wird die Richtung des Ortsvektors umgedreht: Beispielsweise zeigt ein Vektor, der ursprünglich nach rechts oben gezeigt hat, nach einer Skalierung mit einem negativen Skalierungsfaktor nach links unten. der Ortsvektor beziehungsweise das geometrische Objekt erfährt dadurch eine *zentrische Streckung* am Koordinaten-Ursprung.

Beispiel:

- Wird eine Skalierungsmatrix $\underline{A}_{\text{Ska}}$ mit $\lambda = -1,5$ mit einem Ortsvektor multipliziert, so wird dieser um den Faktor $1,5$ gestreckt und um $180\,°$ um den Koordinatenursprung gedreht. Dies soll am Beispiel eines Rechtecks gezeigt werden, dessen Eckpunkte folgende Koordinaten haben:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0; & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3; & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 3; & +2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0; & +2 \end{pmatrix}$$

  Man kann sich die Wirkungsweise der Matrix wiederum beispielhaft anhand des Ortsvektors $\vec{c} = (3;\,2)$ des Punktes C veranschaulichen:

$$\underline{A}_{\text{Ska}} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -1,5 & 0 \\ 0 & -1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \cdot 3 + & 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 - & 1,5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \cdot 3 \\ -1,5 \cdot 2 \end{pmatrix} = -1,5 \cdot \vec{c}$$

  Die Koordinaten-Berechnung der übrigen neuen Punkte erfolgt wiederum nach dem gleichen Schema; man erhält somit ein um den Faktor $1,5$ skaliertes Objekt im gegenüber liegenden Quadranten.

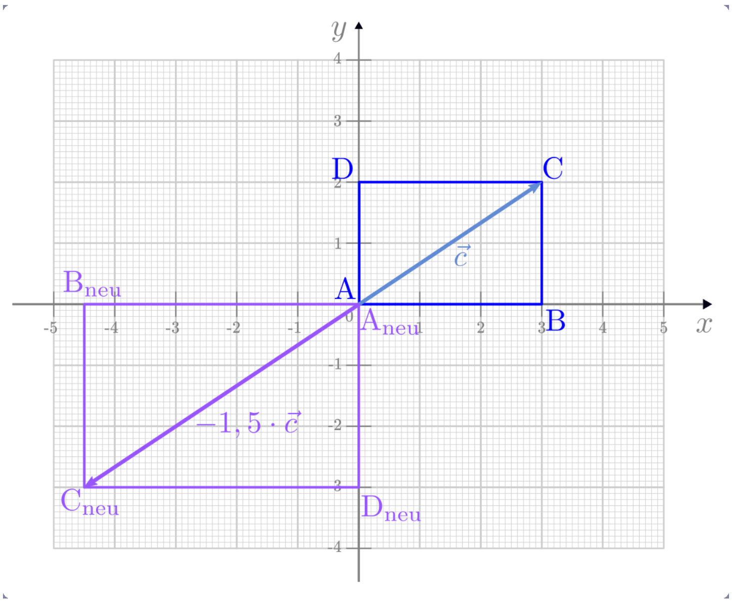


Abb. 152: Wirkungsweise einer Skalierungsmatrix mit negativem Skalierungsfaktor.

Spiegelungsmatrizen:

Soll ein (Orts-)Vektor an der x- oder an der y-Achse eines zweidimensionalen Koordinatensystems gespiegelt werden, so ist dies mittels der folgenden Matrizen möglich:

$$\begin{aligned}
\text{Spiegelung an der } x\text{-Achse:} \quad & \underline{A}_{\text{Spi}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\text{Spiegelung an der } y\text{-Achse:} \quad & \underline{A}_{\text{Spi}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{179}$$

Diese beiden Spiegelungsmatrizen ähneln einer Skalierungsmatrix mit der Skalierungsgröße 1; auch sie lassen die Länge eines Vektors beziehungsweise die Größe eines durch mehrere (Orts-)Vektoren festgelegten Objekts unverändert. Der Unterschied zur reinen Skalierung liegt also in dem nun auftretenden Minus-Zeichen.

Beispiel:

- Das Rechteck mit den folgenden Eckpunkten soll an der x-Achse gespiegelt werden:

  $$\text{A} = (\,1;\ 1\,) \quad \text{B} = (\,3;\ \ 1\,) \quad \text{C} = (\,3;\ +2\,) \quad \text{D} = (\,1;\ +2\,)$$

  Wendet man die obige Spiegelungsmatrix beispielsweise auf den Ortsvektor $\vec{a}$ des Punktes A an, so erhält man:

  $$\underline{A}_{\text{Spi}} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + \quad 0 \ \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Die Matrix lässt also die x-Komponente des Vektors, mit dem sie multipliziert wird, unverändert; die y-Komponente des Vektors hingegen erhält ein umgekehrtes Vorzeichen.

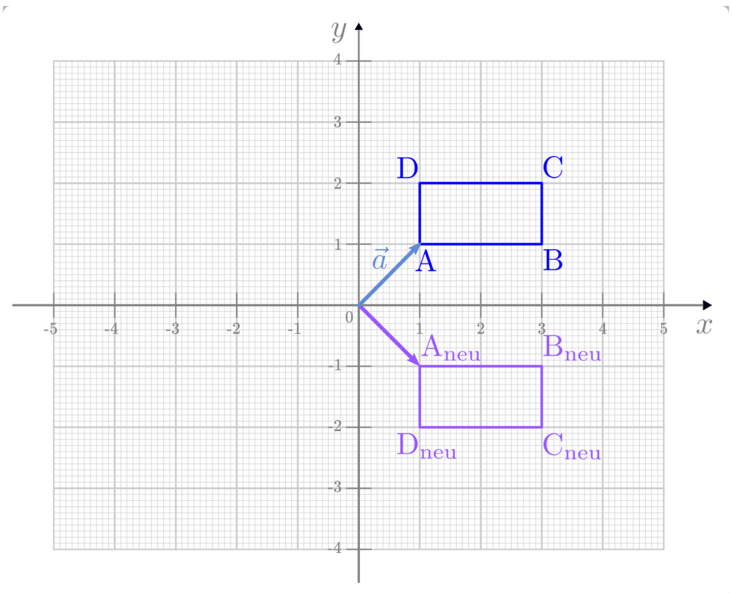


Abb. 153: Wirkungsweise einer Spiegelungsmatrix

Die Spiegelung an der y-Achse erfolgt nach dem gleichen Prinzip; die entsprechende Matrix lässt hierbei allerdings die y-Komponente des Vektors unverändert, während die x-Komponente ein umgekehrtes Vorzeichen erhält.

Wendet man die gleiche Spiegelungsmatrix zweimal hintereinander auf einen Vektor beziehungsweise ein geometrisches Objekt an, so stimmt das Resultat mit dem ursprünglichen Objekt überein. Nimmt man hingegen zuerst eine Spiegelung an der x- und anschließend eine Spiegelung an der y-Achse vor, so erhält man eine *Punktspiegelung* des ursprünglichen Objekts um den Koordinatenursprung.

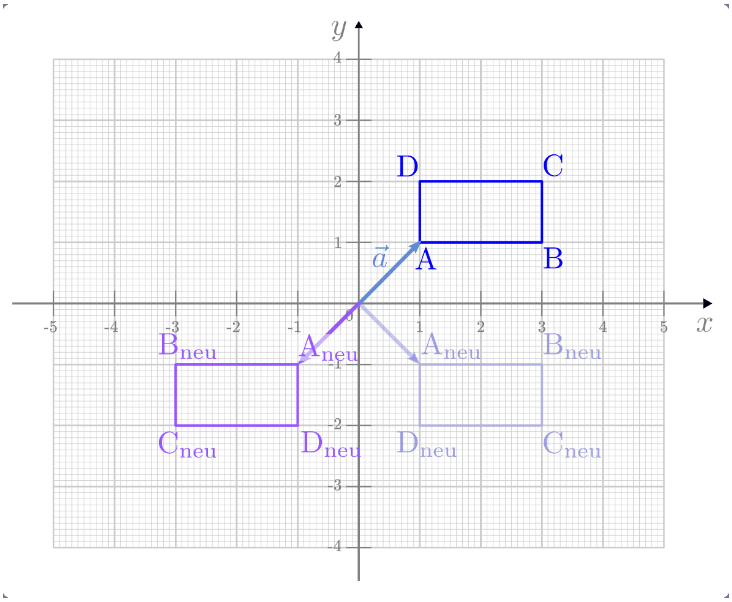


Abb. 154: Zweifache Spiegelung eines Objekts an der x- und an der y-Achse.

Eine Punktspiegelung ist formal mit einer Skalierung des Objekts mit dem Faktor $\lambda = -1$ identisch. Dies lässt sich unter anderem mittels des Assoziativ-Gesetzes der Matrix-Multiplikation zeigen:

$$\begin{aligned}
\underline{A}_{\text{Spi,y}} \cdot \left(\underline{A}_{\text{Spi,x}} \cdot \vec{a}\right) &= \left(\underline{A}_{\text{Spi,y}} \cdot \underline{A}_{\text{Spi,x}}\right) \cdot \vec{a} \\
&= \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]} \cdot \vec{a} \\
&= \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \cdot \vec{a} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Projektionsmatrizen

Mittels einer Projektionsmatrix lässt sich ein Vektor, wie der Name schon sagt, auf die x- beziehungsweise y-Achse "projezieren". Anschaulich kann man sich eine solche Projektion als "Schatten" des Vektors vorstellen, der sich bei einer Beleuchtung des Vektors senkrecht zur jeweiligen Achse ergeben würde. Um einen (Orts-)Vektor auf die x- beziehungsweise y-Achse abzubilden, kann jeweils folgende Matrix genutzt werden:

$$\begin{aligned}\text{Projektion auf die } x\text{-Achse:} \quad \underline{A}_{\mathrm{Pro}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{Projektion auf die } y\text{-Achse:} \quad \underline{A}_{\mathrm{Pro}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{180}$$

Beispiel:

- Der Vektor $\vec{v}$, der die Punkte $\mathrm{A} = (1;\, 2)$ und $\mathrm{B} = (4;\, 3)$ miteinander verbindet, soll auf die x-Achse projeziert werden.

  Für die senkrechten Projektionen der Punkte A und B ergibt sich durch Anwenden der entsprechenden Projektionsmatrix auf die zugehörigen Ortsvektoren:

  $$\mathrm{A_x} = \underline{A}_{\mathrm{Pro}} \cdot \overrightarrow{0\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $$\mathrm{B_x} = \underline{A}_{\mathrm{Pro}} \cdot \overrightarrow{0\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Den projezierten Vektor $\vec{v}_{\mathrm{x}}$ zum Vektor $\vec{v} = \overline{0\mathrm{B}} - \overline{0\mathrm{A}}$ erhält man entweder, indem man die Differenz der Ortsvektoren von $\mathrm{B_x}$ und $\mathrm{A_x}$ bildet, oder auch indem man die entsprechende Projektionsmatrix auf den Vektor $\vec{v}$ anwendet:

  $$\underline{A}_{\mathrm{Pro}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Der "Schatten" des Vektor $\vec{v}$ lässt sich somit rechnerisch mittels des Ausdrucks $\overrightarrow{0\mathrm{A_x}} + \lambda \cdot \vec{v}_{\mathrm{x}}$ mit $0 \le \lambda \le 1$ beschreiben.[2]

Drehmatrizen

Soll ein Vektor um einen Winkel φ in positiver Winkelrichtung (also gegen den Uhrzeigersinn) um den Koordinatenursprung gedreht werden, so ist dies mittels der folgenden Drehmatrix möglich:

$$\underline{A}_{\mathrm{Dr}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{181}$$

Die Wirkungsweise dieser Matrix kann man sich gut anhand einiger Sonderfälle veranschaulichen:

[2] Ist der Zahlenwert der Projektionsmatrix ungleich Eins, so wird der Schatten skaliert und die Projektion entsprechend schräg.

Soll ein dreidimensionaler Vektor auf eine Ebene projeziert werden, so kann dies ebenfalls mittels einer Projektionsmatrix erfolgen. Um beispielsweise einen Vektor $\vec{v}$ auf die xy-Ebene zu projezieren, kann folgende Matrix auf den Vektor angewendet werden:

$$\underline{A}_{\mathrm{Pro}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{\mathrm{x}} \\ v_{\mathrm{y}} \\ v_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} = v_{\mathrm{x}} + v_{\mathrm{y}}$$

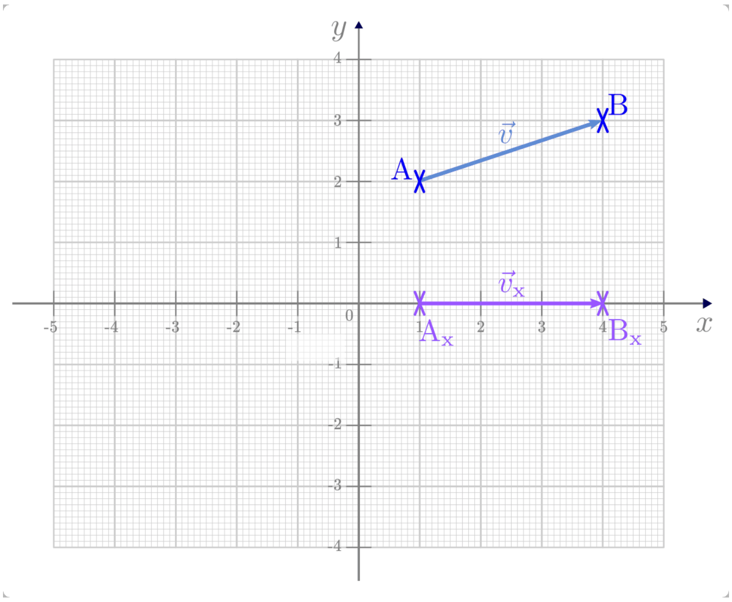


Abb. 155: Wirkungsweise einer Projektionsmatrix.

- Ist der Drehwinkel $\varphi = 0\,°$, so ist $\cos(\varphi) = 1$ und $\sin(\varphi) = 0$. Die Drehmatrix nimmt in diesem Fall folgende Form an:

$$\underline{A}_{\mathrm{Dr},\varphi=0°} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Diese Matrix entspricht der Einheits-Matrix, die jeden Vektor unverändert lässt; eine Drehung um $0\,°$ hat somit keine Auswirkung auf geometrische Objekte.

- Ist der Drehwinkel $\varphi = 180\,°$, so ist $\cos(\varphi) = -1$ und $\sin(\varphi) = 0$. Die Drehmatrix nimmt in diesem Fall folgende Form an:

$$\underline{A}_{\mathrm{Dr},\varphi=0°} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Diese Matrix entspricht einer Skalierungsmatrix mit dem Faktor $\lambda = -1$; diese bewirkt, wie bereits beschrieben, eine Punktspiegelung eines geometrischen Objekts um den Koordinaten-Ursprung und somit eine Drehung um $180\,°$.

- Ist der Drehwinkel $\varphi = 45\,°$, so ist $\cos(\varphi) = \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0,707$. Die Drehmatrix nimmt in diesem Fall folgende Form an:

$$\underline{A}_{\mathrm{Dr},\varphi=45°} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Der Faktor $\frac{\sqrt{2}}{2}$, der in diesem Fall bei allen Komponenten der Matrix auftritt, bewirkt eine Skalierung des geometrischen Objekts; ansonsten besteht der Unterschied zu den bisherigen Matrizen darin, dass nun alle Elemente der Matrix von Null verschieden sind.

  Die Wirkungsweise der obigen Matrix soll anhand einer Drehung der beiden Punkte $\mathrm{A} = (3;\,0)$ und $\mathrm{B} = (0;\,3)$ beziehungsweise der zugehörigen Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

um $\varphi = 45\,°$ veranschaulicht werden. Man erhält in diesem Fall für die Koordinaten des neuen Punktes $\mathrm{A}_{\mathrm{neu}}$:

$$\underline{A}_{\mathrm{Dr},\varphi=45°} \cdot \vec{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_{\mathrm{Dr},\varphi=45°} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

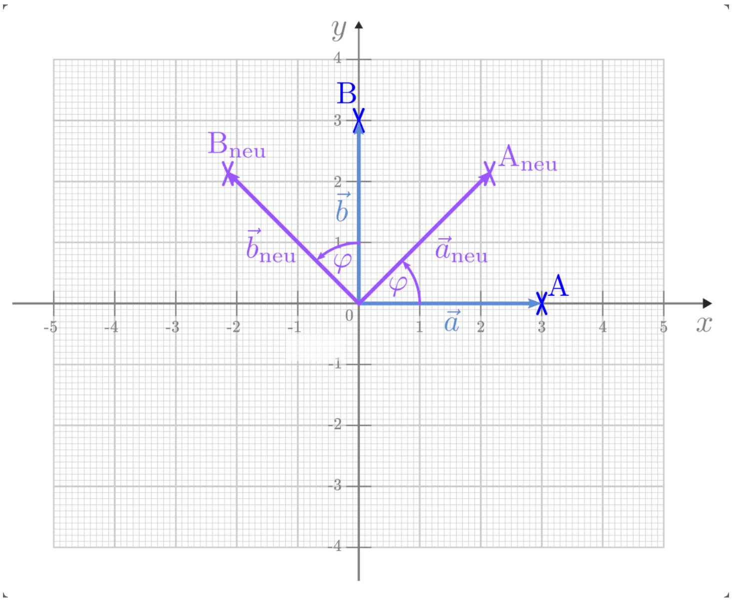


Abb. 156: Wirkungsweise einer Drehmatrix.

Die neuen Punkte haben somit gerundet die Koordinaten $\mathrm{A}_{\mathrm{neu}} = (2,121;\, 2,121)$ und $\mathrm{B}_{\mathrm{neu}} = (-2,121;\, 2,121)$.

Berechnet man die Länge der neuen Ortsvektoren, so stellt man fest, dass sich diese durch die Anwendung der Drehmatrix nicht geändert haben:

$$|\vec{a}_{\mathrm{neu}}| = \sqrt{\left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9 \cdot 2}{4} + \frac{9 \cdot 2}{4}} = \sqrt{9} = 3 \quad \checkmark$$

$$\left|\vec{b}_{\mathrm{neu}}\right| = \sqrt{\left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9 \cdot 2}{4} + \frac{9 \cdot 2}{4}} = \sqrt{9} = 3 \quad \checkmark$$

Drehmatrizen bilden geometrische Objekte also längentreu ab. zudem bleibt auch der Winkel zwischen den beiden Ortsvektoren identisch, wie man durch Bildung des *Skalarprodukts* der beiden neuen Vektoren zeigen kann:

$$\vec{a}_{\mathrm{neu}} \cdot \vec{b}_{\mathrm{neu}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \big(3 \cdot (-3) + 3 \cdot 3\big) = 0$$

Da die Ortsvektoren einen von Null verschiedenen Betrag haben und für das Skalarprodukt $\vec{a}_{\text{neu}} \cdot \vec{b}_{\text{neu}} = |\vec{a}_{\text{neu}}| \cdot |\vec{b}_{\text{neu}}| \cdot \cos(\varphi_{\text{neu}})$ gilt, muss in diesem Fall $\cos(\varphi_{\text{neu}}) = 0$ sein, damit die rechte Seite der Gleichung ebenfalls den Wert Null liefert; folglich ist auch der Winkel φ_{neu} zwischen den neuen Vektoren gleich $90\,°$.

Bei Drehungen um beliebige Winkel erhält man für die neuen Ortsvektoren meist Werte, die sich nur auf einige Nachkomma-Stellen gerundet angeben lassen; allerdings lässt sich bereits bei vier Nachkomma-Stellen eine für die meisten Zwecke ausreichende Genauigkeit erzielen. In jedem Fall bleiben die gedrehten Objekte längen- und winkeltreu.[3]

Scherungsmatrizen

Eine Scherungsmatrix bewirkt eine Verformung eines geometrischen Objekts. Allgemein hat eine zweidimensionale Scherungsmatrix folgende Form:

$$A_{\text{Sche}} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{182}$$

Die Wirkungsweise einer Scherungsmatrix soll im folgenden anhand des Beispiels $\lambda = 1$ verdeutlicht werden.

Beispiel:

- Wie verändert eine Scherungsmatrix mit $\lambda = 1$ ein Quadrat, das durch folgende Punkte begrenzt wird?

  $$\text{A} = (-2;\ -2) \quad \text{B} = (2;\ -2) \quad \text{C} = (2;\ 2) \quad \text{D} = (-2;\ 2)$$

  Um die Punkte des neuen Vierecks zu erhalten, kann man die Scherungsmatrix auf die Ortsvektoren der einzelnen Eckpunkte anwenden:

  $$A_{\text{Sche}} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

  $$A_{\text{Sche}} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

  $$A_{\text{Sche}} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  $$A_{\text{Sche}} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Durch die Anwendung der Scherungsmatrix wird ein geometrisches Objekt also "verzerrt". Der Flächeninhalt des Objekts, im obigen Beispiel eines Quadrats, bleibt bei der Scherung zwar gleich, jedoch ändern sich die Winkel zwischen den einzelnen Seiten.

[3] Soll die Drehung in die entgegengesetzte Richtung, also mit dem Uhrzeigersinn erfolgen, so muss das Minus-Zeichen vor die andere Sinus-Komponente der Drehmatrix gesetzt werden:

$$\underline{A}_{\text{Dr},\circlearrowleft} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{A}_{\text{Dr},\circlearrowright} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

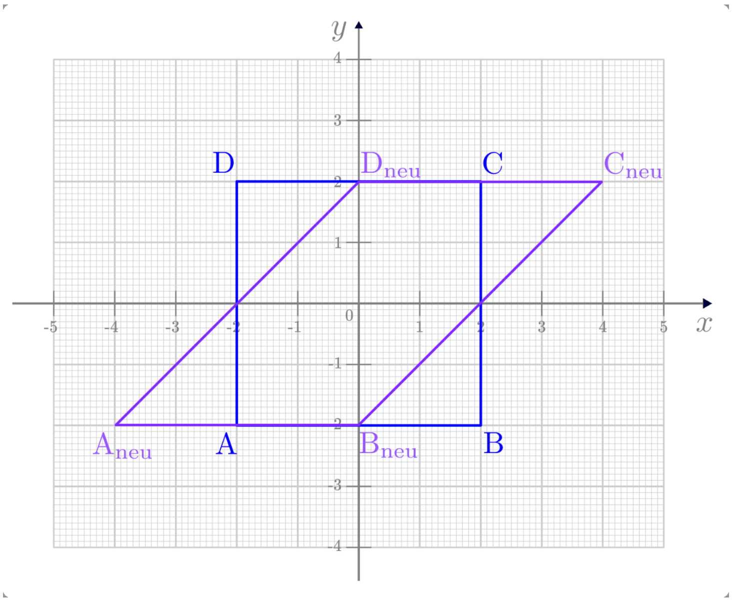


Abb. 157: Wirkungsweise einer Scherungsmatrix.

Matrizengleichungen

Matrizen können auch zur Lösung von *linearen Gleichungssystemen* genutzt werden. Bei Verwendung von Matrizen können diese sehr kompakt dargestellt werden. Beispielsweise hat ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten folgende Form:

$$\begin{aligned}a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 &= b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 &= b_3\end{aligned}$$

In Matrizenschreibweise kann dies folgendermaßen geschrieben werden:

$$\underline{A}_{(3;3)} \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{183}$$

Gesucht sind bei dieser "Matrizengleichung" wiederum die Komponenten x_1, x_2 und x_3 des Vektors $\vec{x}$. Man kann allerdings, um die Gleichung zu lösen, nicht einfach durch $\underline{A}$ dividieren, da die Division durch eine Matrix nicht definiert ist. Die Lösung besteht vielmehr darin, eine so genannte "inverse" Matrix $\underline{A}^{-1}$ zu finden, die bei Multiplikation mit der Matrix $\underline{A}$ eine Einheitsmatrix ergibt.[4]

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E} \tag{184}$$

Hat man eine solche inverse Matrix A^{-1} zur Matrix $\underline{A}$ gefunden, kann man beide Seiten der obigen Gleichung (183) damit multiplizieren:

$$\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \vec{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b}$$

[4] Die Schreibweise $\underline{A}^{-1}$ soll auf die Ähnlichkeit zur Schreibweise $a^{-1} = \frac{1}{a}$ für reelle Zahlen hinweisen, für die ebenfalls $a^{-1} \cdot a = 1$ gilt. Es kann allerdings nicht $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\underline{A}}$ sein, da eine Division durch eine Matrix nicht definiert ist.

Mit $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$ folgt damit:

$$\underline{E} \cdot \vec{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b}$$

Da die Einheitsmatrix das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist, also $\underline{E} \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt, folgt somit als Lösung für $\vec{x}$:

$$\vec{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b} \tag{185}$$

Die eigentliche Aufgabe für die Lösung einer Matrizengleichung besteht nun also darin, zu einer Matrix $\underline{A}$ die inverse Matrix $\underline{A}^{-1}$ zu finden. Hierzu muss folgende Gleichung gelöst werden:

$$\begin{array}{c|c}
\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} & \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Alle $\hat{a}_{\mathrm{ij}}$ mit $i, j = 1, \dots, n$ sind Unbekannte; es muss also ein Gleichungssystem mit n^2 Unbekannten und n^2 Gleichungen zur Bestimmung der inversen Matrix gelöst werden.

... to be continued ...

Determinanten

Determinanten stellen neben dem *Gaussschen Lösungsverfahren* ein weiteres nützliches Werkzeug im Umgang mit linearen Gleichungssystemen dar. Sie ermöglichen unter anderem eine verhältnismäßig einfache und schnelle Untersuchung, ob ein lineares Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt oder nicht.

Zweireihige Determinanten

Um den Umgang mit Determinanten zu verdeutlichen, werden im folgenden Abschnitt zunächst wiederum lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten betrachtet. Diese lassen sich im Allgemeinen in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Allgemein kann ein solches Gleichungssystem gelöst werden, indem man beispielsweise die erste Gleichung mit a_{22} und die zweite Gleichung mit a_{12} multipliziert. Es folgt:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot a_{22} \cdot x_1 + a_{12} \cdot a_{22} \cdot x_2 &= b_1 \cdot a_{22} \\ a_{12} \cdot a_{21} \cdot x_1 + a_{12} \cdot a_{22} \cdot x_2 &= b_2 \cdot a_{12} \end{aligned}$$

In dieser Form sind die Koeffizienten von x_2 in beiden Gleichungen identisch. Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man eine einzelne Gleichung für x_1:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot x - a_{12} \cdot a_{21} \cdot x_1 = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$
$$x_1 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$

Im zweiten Rechenschritt wurde auf der linken Seite x ausgeklammert. Ist die verbleibende Klammer ungleich Null, so erhält man als Lösung für x_1:

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Nach dem gleichen Prinzip kann man im die erste Gleichung des ursprünglichen Gleichungssystems mit a_{11} und die zweite Gleichung mit a_{21} multiplizieren, um eine Bestimmungsgleichung für x_2 zu erhalten. Die Lösung lautet dabei:

$$x_2 = \frac{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Die Lösbarkeit des Gleichungssystems hängt also nur davon ab, ob für den Term $(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \neq 0$ gilt. Die "Determinante" eines Gleichungssystems wird daher folgendermaßen definiert:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \tag{186}$$

Das Ergebnis dieser Determinante lässt sich nach der so genannten "Regel von Sarrus" berechnen, indem man das Produkt der in der "Hauptdiagonale" stehenden Zahlen (von links oben nach rechts unten) bildet und davon das Produkt der in der "Nebendiagonalen" stehenden Zahlen (von links unten nach rechts oben) subtrahiert. Ist die resultierende Zahl ungleich Null, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Die Lösungen für x_1 und x_2 lassen sich nach der so genannten Regel von Cramer ebenfalls in Determinanten-Schreibweise darstellen. Im Nenner steht dabei immer die eigentliche Determinante des Gleichungssystems, im Zähler wird die erste beziehungsweise zweite Spalte der Determinante durch die rechte Seite der Gleichung ersetzt. Somit gilt:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{187}$$

Dreireihige Determinanten

Determinanten lassen sich auch für Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Unbekannten definieren. In allgemeiner Form lässt sich ein solches Gleichungssystem folgendermaßen beschreiben:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$
$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$
$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3$$

Entsprechend lässt sich hierfür eine Determinante in folgender Form definieren:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ & - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} \end{aligned} \tag{188}$$

Wiederum lässt sich die Determinante nach der Regel von Sarrus berechnen, indem man die Produkte der in der "Hauptdiagonale" stehenden Zahlen (von links oben nach rechts unten) bildet und davon die Produkte der in der "Nebendiagonalen" stehenden Zahlen (von links unten nach rechts oben) subtrahiert. Ist die resultierende Zahl ungleich Null, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

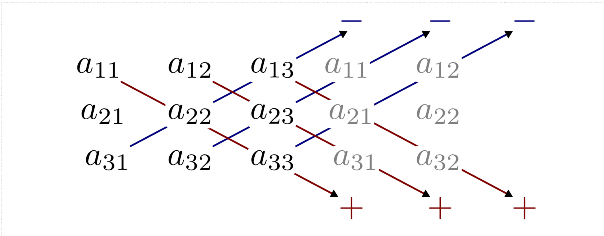


Abb. 158: Merkhilfe zur Regel von Sarrus

Die Lösungen für x_1, x_2 und x_3 lassen sich ebenfalls nach der Regel von Cramer in Determinanten-Schreibweise darstellen. Im Nenner steht wiederum die eigentliche Determinante des Gleichungssystems, im Zähler wird die erste, zweite beziehungsweise dritte Spalte der Determinante durch die rechte Seite der Gleichung ersetzt. Somit gilt:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_2 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{189}$$

Mehrreihige Determinanten

Auch Gleichungssysteme mit mehr als drei Gleichungen und Unbekannten lassen sich mit der obigen Determinantenmethode (Regel von Cramer) lösen. Dazu müssen Determinanten mit $n > 3$ Reihen berechnet werden. Möchte man für solche Determinanten eine allgemeine Lösungsregel angeben, so werden die dabei auftretenden Terme jedoch schnell unübersichtlich: Eine Erweiterung der Regel von Sarrus auf n-reihige Determinanten enthält allgemein $n!$ Summanden, bei einer $n = 4$-reihigen Determinante müssten also bereits $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Summanden ausgewertet werden , bei einer $n = 5$-reihigen Determinante sogar $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Einfacher ist es im allgemeinen, aus einer n-reihigen Determinante insgesamt n Determinanten mit $(n-1)$ Reihen zu bilden. Dieses rekursive Entwlicklungsschema, das auch von Computer-Algebra-Systemen zur Berechnung beliebig großer Determinanten genutzt wird, soll hier am Beispiel einer vierreihigen Determinante vorgestellt werden.

Definition:

> Streicht man in einer Determinante A eine beliebige Zeile i und eine beliebige Spalte j, so bezeichnet man die übrigbleibenden Elemente als Unterdeterminante D_{ij}. Das Element a_{ij}, das sich am Schnittpunkt beider Linien befindet, nennt man Schnittpunktelement.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Abb. 159: Schnittpunktelement a_{23} bei Streichung der zweiten Zeile und der dritten Spalte.

Definition:

> Multipliziert man den Wert der Unterdeterminante D_{ij} mit dem Faktor $(-1)^{i+j}$, so spricht man von der zum Element a_{ij} adjungierten Unterdeterminante A_{ij}:
>
> $$A_{\mathrm{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot D_{\mathrm{ij}} \qquad (190)$$

Das Vorzeichen des Faktors $(-1)^{i+j}$ hängt von der Zeilen- und Spaltennummer von a_{ij} ab; ist die Summe beider Zahlen gerade, so ist das Vorzeichen positiv, andernfalls negativ. Anschaulich kann man das Vorzeichen auch anhand einer schachbrettartigen Vorzeichentabelle ablesen.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Abb. 160: Vorzeichen-Schema für die Entwicklung von Unterdeterminanten

Mit den beiden obigen Definitionen kann der so genannte Entwicklungssatz von Leibniz folgendermaßen formuliert werden:

> "Multipliziert man die Elemente einer beliebigen Reihe mit den jeweiligen adjungierten Unterdeterminanten und addiert die so entstehenden Produkte, so erhält man den Wert der Determinante."

Es ist frei wählbar, nach welcher Reihe (Zeile oder Spalte) man eine Determinante entwickelt. Entwickelt man eine Determinante A nach der i-ten Zeile, so gilt:

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_{\mathrm{ij}} \cdot A_{\mathrm{ij}}$$

Entwickelt man eine Determinante A hingegen nach der j-ten Spalte, so gilt:

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{ij}} \cdot A_{\mathrm{ij}}$$

Zweckmäßig ist es, für die Entwicklung eine Reihe zu wählen, die möglichst viele Nullen enthält.

Beispiel:

- Folgende Determinante A mit $n = 4$ Reihen soll berechnet werden:

  $$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

  Zunächst wird die Determinante in Unterdeterminanten mit $n = 3$ Reihen entwickelt. Vorteilhaft ist hierbei eine Entwicklung nach der vierten Spalte, da diese zwei Nullen enthält. Nach dem Leibnizschen Entwicklungssatz gilt:

  $$\begin{aligned} A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= -\,0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad -\,2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \quad 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

  Alle Determinanten liefern reelle Zahlen als Ergebnisse; mit Null multipliziert ergeben sie ebenfalls Null. Es müssen somit nur die zweite und die dritte Unterdeterminante ausgewertet werden. Hierzu kann die Regel von Sarrus genutzt werden:

  $$\begin{aligned} A = (-1) \cdot &\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = (-1) \cdot &\qquad 0 \qquad - 2 \cdot \qquad (-2) \qquad = 4 \end{aligned}$$

  Die Determinante A hat somit den Wert 4.

Um ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und Unbekannten zu lösen, müssen neben der Determinante A der Koeffizienten a_{ij} auch die n Determinanten A_j berechnet werden, die sich ergeben, wenn man die j-te Spalte von A durch die Ergebnisspalte b ersetzt. Für die Lösung x_{j} gilt dann mit $j = 1, \ldots, n$:

$$x_{\mathrm{j}} = \frac{A_{\mathrm{j}}}{A}$$

Voraussetzung ist bei dieser allgemeinen Regel von Cramer wiederum, dass die Determinante A der Koeffizienten ungleich Null ist.

Determinanten-Regeln

Zum Rechnen mit Determinanten sind zudem folgende Regeln bisweilen nützlich:

- Der Wert einer Determinante bleibt gleich, wenn man sie transponiert, also die Zeilen mit den Spalten vertauscht.
- Vertauscht man zwei Zeilen miteinander, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante. Ebenso ändert sich das Vorzeichen einer Determinante, wenn man zwei Spalten vertauscht.
- Der Wert einer Determinante bleibt gleich, wenn die Elemente einer Zeile mit einem beliebigen Faktor multipliziert und das Ergebnis zu den entsprechenden Elementen einer anderen Zeile addiert.

  Das gleiche gilt, wenn man die mit einem beliebigen Faktor multiplizierten Elemente einer Spalte zu den entsprechenden Elementen einer anderen Spalte addiert.
- Eine Determinante hat den Wert Null, wenn alle Elemente einer Zeile oder Spalte gleich Null sind oder wenn je zwei Zeilen beziehungsweise Spalten gleich oder zueinander proportional sind.
- Eine Determinante wird mit einem Faktor multipliziert, indem man alle Elemente einer einzelnen Zeile oder einer einzelnen Spalte mit diesem Faktor multipliziert.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Stochastik

Zufallsexperimente und Ereignisse

Experimente, die unter gleichen Bedingungen zu gleichen Ergebnissen führen, bezeichnet man als determiniert. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden hingegen meist zufällige Vorgänge betrachtet.

Zufallsexperimente

Als Experiment bezeichnet man allgemein einen Vorgang, der (zumindest prinzipiell) beliebig oft wiederholt werden kann. Dabei ist klar festgelegt, welche Messgröße beobachtet werden soll, jedes mögliche Ergebnis kann also eindeutig festgestellt werden. Eine einzelne Durchführung eines Experiments nennt man Versuch.

Ein Experiment, bei dem die Menge aller möglichen Ergebnisse bekannt ist, jedoch nicht das bei der Durchführung eines Versuchs tatsächlich eintretende Ergebnis, bezeichnet man als Zufallsexperiment.

Beispiel:

- In einer Urne befinden sich 50 gleichartige Kugeln mit den Nummern $1, 2, \ldots, 50$. Eine Kugel wird blind gezogen und anschließend ihre Nummer notiert. Es können dabei 50 mögliche Ergebnisse auftreten, wobei die Nummer der gezogenen Kugel k genannt wird.

Für die einzelnen Versuchsergebnisse werden üblicherweise Kurzbezeichnungen eingeführt, beispielsweise k für das Ergebnis "Die gezogene Kugel hat die Nummer k". Alle möglichen Versuchsergebnisse fasst man zu einer so genannten Ergebnismenge Ω zusammen. Im obigen Fall gilt beispielsweise:

$$\Omega = \{\, 1,\, 2,\, \ldots,\, 50 \,\}$$

Die einzelnen, voneinander verschiedenen Ergebnisse eines Zufallsexperiments werden allgemein mit $\omega_1, \omega_2, \ldots$ bezeichnet. Allgemein besteht eine Ergebnismenge also aus folgenden Elementen:

$$\Omega = \{\, \omega_1,\, \omega_2,\, \ldots,\, \omega_{\mathrm{n}} \,\}$$

Mehrstufige Zufallsexperimente

Einstufige Zufallsexperimente, wie beispielsweise das Ziehen *einer* Kugel aus einer Urne, können zu mehrstufigen Zufallsexperimenten zusammengesetzt werden. Hierbei wird das zu Grunde liegende einstufige Zufallsexperiment mehrfach ausgeführt.

Beispiel:

- Eine Münze wird zweimal geworfen. Bei jedem Wurf kann entweder das Ergebnis "Kopf" (K) oder "Zahl" (Z) eintreten. Insgesamt lassen sich die möglichen Versuchsergebnisse durch ein Tupel zweier Werte beschreiben. Für die Ergebnismenge gilt in diesem Fall also:

$$\Omega = \{\ (K,K),\ (K,Z),\ (Z,K),\ (Z,Z)\ \}$$

Die Ergebnismenge im obigen Beispiel lässt sich auch als *Produktmenge* $\{K,Z\} \times \{K,Z\}$ der Ergebnismengen eines einmaligen Werfens einer Münze darstellen. Allgemein lässt sich ein k-stufiges Zufallsexperiment mit Hilfe von geordneten Zahlenpaaren der Länge k (so genannten "k-Tupeln") beschreiben.

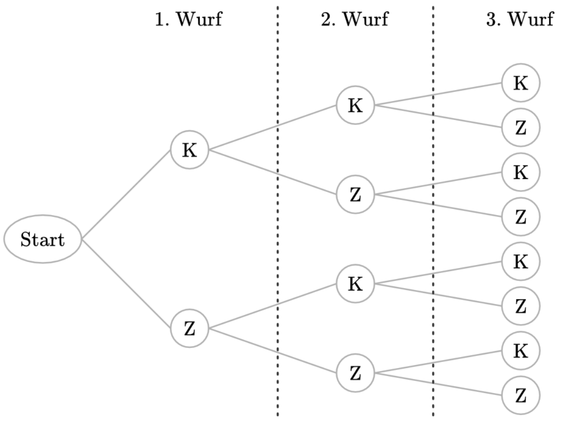


Abb. 161: Baumdiagramm eines dreimailigen Münzwurfes.

Eine Ergebnismenge kann durch einen so genannten Ergebnisbaum veranschaulicht werden. Jedem Ergebnis entspricht dabei einem Weg durch den Ergebnisbaum.

Ereignisse

Ereignisse werden formal durch Teilmengen von Ω beschrieben.

Beispiel:

- Eine Urne enthält 15 Kugeln, wobei je zwei Kugeln mit den Nummern $0,1,2,3,4$ und je eine Kugel mit den Nummern $5,6,7,8,9$ vorkommen. Es wird eine Kugel blind gezogen und ihre Nummer notiert, die Ergebnismenge ist also $\Omega = \{0,1,2,\ldots,9\}$.

Fasst man das Zufallsexperiment als Glücksspiel auf, bei dem man gewinnt, wenn eine Nummer ≥ 5 gezogen wird, so tritt dieses Ereignis genau dann ein, wenn die gezogene Nummer gleich 5, 6, 7, 8 oder 9 ist, das Versuchsergebnis also zur Menge $M = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ gehört. Das Ereignis ist also durch die Menge M eindeutig beschrieben.

Allgemein beschreibt jede Teilmenge M von Ω ein Ereignis. Ist die Teilmenge mit Ω identisch ($M = \Omega$), so spricht man von einem sicheren Ereignis, ist die Teilmenge gleich der leeren Menge ($M = \emptyset$), so handelt es sich um ein unmögliches Ereignis. Beinhaltet die Teilmenge genau ein Element ω, so nennt man das Ereignis elementar.[1]

Die Menge aller möglichen Ereignisse, also die Menge aller Teilmengen von Ω, heißt Ereignismenge $\mathcal{P}(\Omega)$.[2]

Da es sich bei Ereignissen um Mengen handelt, können diese ebenfalls durch Mengenoperationen miteinander verknüpft werden:

- Betrachtet man die Schnittmenge $M_1 \cap M_1$ zweier Ereignisse, so spricht man von einem UND-Ereignis (M_1 und M_1).
- Betrachtet man die Vereinigungsmenge $M_1 \cup M_1$ zweier Ereignisse, so spricht man von einem ODER-Ereignis (M_1 und M_1).
- Betrachtet man die Komplementmenge $\overline{M_1}$ eines Ereignisses, so spricht man von einem Gegenereignis (nicht M_1).

Durch Bildung von *Vereinigungs-, Schnitt- und Komplementmengen* lassen sich nach den *Rechenregeln der Mengenlehre* weitere Ereignisse formulieren beziehungsweise Beschreibungen von Ereignissen vereinfacht werden.

Können zwei Ereignisse M_1 und M_2 nicht gleichzeitig eintreten, ist also $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, so nennt man die Ereignisse unvereinbar. Dies ist stets bei einem Ereignis M und dem entsprechenden Gegenereignis $\overline{M}$ der Fall, es sind jedoch auch weitere Fälle möglich.

Beispiel:

- Ein Würfel wird zweimal geworfen und jeweils die Augenzahl notiert. Dabei werden folgende Ereignisse betrachtet:
  - M_1: "Die Summe der Augenzahlen ist gleich 7", also $M_1 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$.
  - M_2: "Pasch: Die beiden Augenzahlen sind gleich", also $M_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.

  In diesem Beispiel gilt $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, die Ergeignisse sind also unvereinbar.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

---

[1] Zwischen dem Ergebnis ω und dem Elementarereignis $\{\omega\}$ besteht ein formaler Unterschied: Während ω ein Element der Ergebnismenge Ω ist, ist $\{\omega\}$ ein Element der Ereignismenge $\mathcal{P}(\Omega)$.

[2] In der Mengenlehre bezeichnet man $\mathcal{P}(\Omega)$ als Potenzmenge von Ω. Eine n-elementige Menge besitzt 2^n Teilmengen, für $|\Omega| = n$ ist also $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$. Zu einem Zufallsexperiment mit einer n-elementigen Ergebnismenge gibt es also 2^n mögliche Ereignisse.

Wahrscheinlichkeitsmaße

Die relative Häufigkeit

Um die relative Häufigkeit eines Ereignisses M bei einem Zufallsexperiment zu bestimmen, wird dieses n mal durchgeführt und gezählt, wie oft das Ereignis M eintritt. Die relative Häufigkeit $h(M)$ ist dabei folgendermaßen definiert:

$$h(M) = \frac{z(M)}{n}$$

Die Größe $z(M)$ wird dabei "absolute" Häufigkeit des Ereignisses M genannt und gibt an, wie häufig das Ereignis M bei dem Zufallsexperiment insgesamt eingetreten ist.

Bei großen Versuchszahlen gilt für die relative Häufigkeit das so genannte Gesetz der großen Zahlen: Die relative Häufigkeit $h(M)$ eines Ereignisses M weicht bei einem genügend großen Wert von n nur wenig von einem bestimmten, für das Ereignis charakteristischen Wert ab.

Besteht die Menge M aus den Elementen $\omega_1, \ldots, \omega_m$, so gilt für die relative Häufigkeit bei einer Reihe von n Versuchen:

$$h(M) = \frac{z(M)}{n} = \frac{z(\{\omega_1\}) + z(\{\omega_2\}) + \ldots + z(\{\omega_\mathrm{n}\})}{n} = h(\{\omega_1\}) + h(\{\omega_2\}) + \ldots + h(\{\omega_\mathrm{n}\})$$

Die relative Häufigkeit von M ist also gleich der Summe der relativen Häufigkeiten aller Elementarereignisse, die in M enthalten sind.

Allgemein gilt für die relative Häufigkeit stets $0 \le h(M) \le 1$, wobei $h(M) = 0$ für ein unmögliches und $h(M) = 1$ für ein sicheres Ereignis gilt. Sind zudem zwei Ereignisse M_1 und M_2 unvereinbar, d.h. gilt $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, so gilt $h(M_1 \cup (M_2) = h(M_1) + h(M_2)$.

Die Wahrscheinlichkeit

Als Wahrscheinlichkeit bezeichnet man ein Maß für das Eintreten eines Ereignisses M.

Prinzipiell kann nach dem empirischen Gesetz der großen Zahlen für die Wahrscheinlichkeit folgende Festsetzung genutzt werden:

$$P(M) = \lim_{n \to \infty} h(M)$$

In der Praxis lassen sich jedoch stets nur eine begrenzte Zahl n an Versuchen durchführen. Man definiert den Wahrscheinlichkeitsbegriff daher über folgende Axiome:

Definition:

> Eine Abbildung der Form $M \subset \mathcal{P}(\Omega) \to P(A) \in \mathbb{R}$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn folgende Eigenschaften ("Axiome von Kolmogoroff") erfüllt sind:
>
> - Nichtnegativität: Für alle $M \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt:
>
> $$P(M) \ge 0$$

- Normiertheit: Ist $M = \Omega$, so gilt:

$$P(\Omega) = 1$$

- Additivität: Für $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ gilt:

$$P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2)$$

  Die Additivität gilt auch für mehrere Ereignisse M_1, M_2, ..., wenn diese paarweise unvereinbar sind, d.h. wenn $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt.

Die Zahl $p(M)$ wird dabei als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses M bezeichnet.

Zu einem Zufallsexperiment sind beliebig viele unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsmaße denkbar. Welches Maß dabei das "Richtige" ist, hängt von den physikalischen Gegebenheiten des Experiments ab. Bei einem "normalen" Würfel erwartet man beispielsweise, dass die Wahrscheinlichkeit P für jede Augenzahl gleich $\frac{1}{6}$ ist; hat der Würfel jedoch kleine Unregelmäßigkeiten, so können diese zur Folge haben, dass nicht mehr alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind.

Zusätzlich zu den obigen Axiomen gelten als Folgerungen einige weitere Eigenschaften für Wahrscheinlichkeitsmaße:

- Ist $P(M)$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses M, so ist $P(\bar{M}) = 1 - P(M)$ die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $\bar{M}$.[1]
- Ist $M_1 \subset M_2$, so gilt $P(M_1) \leq P(M_2)$. Diese Eigenschaft wird auch "Monotonieregel" genannt.[2]
- Es gilt stets: $P(M_1 \cap \bar{M}_2) = P(M_1) - P(M_1 \cap M_2)$. Diese Eigenschaft wird auch "Zerlegungsregel" genannt.[3]
- Es gilt stets: $P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2) - P(M_1 \cap M_2)$ Diese Eigenschaft wird auch "Additionsregel" genannt.[4]

Wahrscheinlichkeit bei Laplace-Experimenten

Sind alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich, so bezeichnet man das Zufallsexperiment als "Laplace-Experiment". Wahrscheinlichkeiten, die unter dieser Annahme berechnet werden, nennt man entsprechend "Laplace-Wahrscheinlichkeiten".

[1] Dass diese Gleichung gilt, folgt aus $1 = P(\Omega) = P(M \cup \bar{M}) = P(M) + P(\bar{M})$.

[2] Dass diese Gleichung gilt, lässt sich wegen $M_2 = (M_2 \cap \bar{M}_1) \cup M_1$ zeigen:

$$P(M_2) = P((M_2 \cap \bar{M}_1) \cup M_1) = P(M_2 \cap \bar{M}_1) + P(M_1)$$

Wegen $0 \leq P(M_2 + \bar{M}_1)$ folgt $P(M_1) \leq P(M_2)$.

[3] Diese Eigenschaft ergibt sich aus $M_1 = (M_1 \cap \bar{M}_2) + (M_1 \cap M_2)$. Damit gilt ebenfalls $P(M_1 \cap \bar{M}_2) = P(M_1) - P(M_1 \cap M_2)$.

[4] Diese Eigenschaft gilt wegen $P(M_1 \cup M_2) = P(M_1 \cup (M_2 \cap \bar{M}_1)) = P(M_1) + P(M_2 \cap \bar{M}_1)$. Aufgrund der obigen Beziehung gilt zudem $P(M_2 \cap (\bar{M}_1)) = P(M_2) - P(M_1 \cap M_2)$. Ein Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste liefert die Additionsregel.

Hat ein Laplace-Experiment n Elementarereignisse, d.h. ist $|\Omega| = n$, so gilt $P = \frac{1}{n}$ für jedes Elementarereignis $\{\omega\}$. Für ein Ereignis $M = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\mathrm{k}}\}$ mit $k \le n$ gilt entsprechend:

$$P(M) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{|M|}{|\Omega|}$$

Um die Anzahl der günstigen und der möglichen Ergebnisse zu bestimmen, werden üblicherweise Methoden aus der Kombinatorik genutzt.

Kombinatorik

In der Kombinatorik wird untersucht, wie viele unterschiedliche Möglichkeiten sich bei der Anordnung einer bestimmten Anzahl an Objekten ergeben, je nachdem, ob dabei die Reihenfolge der Objekte berücksichtigt wird und/oder die Objekte wiederholt auftreten können.

Permutationen

Eine Menge mit n Elementen soll unter Berücksichtigung der Reihenfolge angeordnet werden, wobei jedes Element nur einmal vorkommen darf. Wie viele verschiedene Anordnungen sind dabei möglich?

Diese Grundfrage lässt sich beantworten, indem Schritt für Schritt geprüft wird, wie viele Möglichkeiten sich bei der Besetzung jeder einzelnen Stelle ergeben. Für die Besetzung der ersten Stelle gibt es n Möglichkeiten, da noch kein Element vergeben wurde. Für die Besetzung der zweiten Stelle bleiben nur noch $n-1$ Möglichkeiten, da ein Element bereits an der ersten Stelle vergeben wurde. Für die Besetzung der dritten Stelle bleiben entsprechend noch $n-2$ Möglichkeiten, und so weiter. Für die letzte Stelle bleibt nur noch ein Element übrig, somit gibt es auch nur eine Möglichkeit die Stelle zu besetzen.

Jede Besetzung einer einzelnen Stelle kann mit jeder Besetzung einer anderen Stelle kombiniert werden. Damit entspricht die Anzahl an n-Permutationen, d.h. an Anordnungen mit Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Wiederholung der Elemente, dem Produkt aller Möglichkeiten für die einzelnen Stellen:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 \tag{191}$$

Dabei wird mit $n!$ (gelesen: n Fakultät) die *Produktfolge* von 1 bis n bezeichnet.

Beispiel:

- Auf wie viele verschiedene Arten lassen sich ein roter, ein grüner, ein blauer, ein gelber und ein weißer Ball in einer Reihe hintereinander legen?

  Da es sich insgesamt um fünf Bälle handelt und jeder Ball die erste Position in der Reihe einnehmen kann, gibt es für die Besetzung der ersten Stelle 5 Möglichkeiten. Für jede mögliche Besetzung der ersten Stelle gibt es 4 Möglichkeiten, die zweite Stelle zu besetzen, und für jede dieser Anordnungen existieren wiederum 3

Möglichkeiten zur Besetzung der dritten Stelle. Schließlich gibt es für jede dieser Anordnungen dreier Bälle 2 Möglichkeiten zur Besetzung der vierten Stelle. Die fünfte Stelle ist automatisch festgelegt, da jeweils nur 1 Besetzungsmöglichkeit vorliegt. Insgesamt ergibt sich damit folgende Anzahl an Möglichkeiten:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Es gibt somit 120 verschiedene Möglichkeiten, die fünf Bälle der Reihe nach anzuordnen.

Permutationen mit nicht unterscheidbaren Objekten

Sind m von den insgesamt n Objekten nicht unterscheidbar, so können diese auf $m!$ verschiedene Arten auf ihre Positionen verteilt werden. Da alle diese Möglichkeiten nur eine einzige Anordnung liefern, würden sie in der Permutations-Gleichung (191) fälschlicherweise zu einem $m!$-fachen an Kombinationsmöglichkeiten führen.

Um die Einschränkung an unterschiedlichen Anordnungen zu berücksichtigen, muss Gleichung (191) durch $m!$ dividiert werden. Die Anzahl an n-Permutationen mit m identischen Objekten ist somit gleich $\frac{n!}{m!}$.

Sind allgemein jeweils $m_1, m_2, \ldots$ der insgesamt n Objekte identisch, so lässt sich die Anzahl an Permutationen (unterschiedlichen Anordnungen) folgendermaßen berechnen:

$$\frac{n}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots} \tag{192}$$

Beispiele:

- Auf wie viele verschiedene Arten lassen sich die Ziffern 001 anordnen?

  In diesem Fall treten zwei gleichartige Objekte (die zwei Nullen) auf. Für die Anzahl der möglichen Permutationen gilt somit:

  $$\frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3$$

  Es sind somit drei verschiedene Permutationen (001, 010, 100) möglich.

- Auf wie viele verschiedene Arten lassen sich die Buchstaben des Wortes "Mississippi" anordnen?

  Wären alle elf Buchstaben voneinander verschieden, so gäbe es $11! = 39\,916\,800$ unterschiedliche Anordnungsmöglichkeiten. Von diesen Anordnungen sind allerdings $4! \cdot 4! \cdot 2!$ identisch, da es sich bei den vier Buchstaben "i", den vier Buchstaben "s" und den zwei Buchstaben "p" um nicht unterscheidbare Objekte handelt, und die verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten der gleichen Buchstaben jeweils zu nur einer einzigen zusammenfallen. Insgesamt ergibt sich somit folgende Anzahl an möglichen Anordnungen:

  $$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{39\,916\,800}{1\ 152} = 34\,650$$

  Es gibt also 34 650 verschiedene Möglichkeiten, die elf Buchstaben unter Berücksichtigung der Reihenfolge anzuordnen.

Variationen

Bei einer Variation wird aus einer Menge von n-Elementen eine Auswahl an k Elementen entnommen; dabei wird die Reihenfolge der entnommenen Elemente berücksichtigt.

Variationen ohne Wiederholung

Wird aus einer Menge mit n Elementen eine Anzahl an $k \le n$ Elementen entnommen, wobei kein Element mehrfach vorkommen darf, so ergibt sich (unter Berücksichtigung der Reihenfolge) eine bestimmte Anordnung der k Elemente. Mathematisch wird eine solche Anordnung $(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_{\mathrm{k}})$ als "Tupel" bezeichnet.[1]

An der ersten Stelle des Tupels kann jedes der n Elemente auftreten. Für die Besetzung der zweiten Stelle sind nur noch $(n-1)$ Möglichkeiten vorhanden, für die Besetzung der dritten Stelle $(n-2)$ Möglichkeiten. Für die Besetzung k-ten Stelle gibt es schließlich $(n-k+1)$ verschiedene Möglichkeiten. Die Anzahl an möglichen Tupeln ist somit insgesamt gleich:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)! \qquad (193)$$

Da $0! = 1$ gilt, kann im Fall $k = n$ die obige Formel (193) als $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ geschrieben werden. Dieser Fall entspricht somit einer Permutation der n Elemente beziehungsweise der Gleichung (191). Im Fall $k < n$ wird die Produktreihe vorzeitig "abgeschnitten".

Variationen mit Wiederholung

Wird aus einer Menge mit n Elementen eine Anzahl an $k \le n$ Elementen entnommen, wobei jedes Element mehrfach vorkommen darf, so spricht man von einer Variation mit Wiederholung. Jedes Ergebnis ist wiederum ein Tupel $(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_{\mathrm{k}})$.

An jeder Stelle des Tupels kann, wenn eine Wiederholung der Elemente möglich ist, jedes der n Elemente auftreten. Die Anzahl an möglichen Tupeln ist somit gleich:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ mal}} = n^k \qquad (194)$$

Beispiel:

- Aus einer Liste mit 100 verschiedenen Zitaten wird jeden Tag nach einem Zufallsprinzip ein Zitat ausgewählt, um als "Zitat des Tages" auf einer Homepage eingeblendet zu werden. Wie viele verschiedene Variationen der Zitate können in 7 Tagen auftreten?

  An jedem der Tage sind 10 verschiedene Zitate möglich, denn es kann auch an zwei oder mehreren aufeinander folgenden Tagen das gleiche Zitat erscheinen. Innerhalb einer Woche gilt damit für die Anzahl an möglichen Zitatefolgen:

  $$10^7 = 10\,000\,000$$

[1] Auch geordnete Paare zweier Zahlen, beispielsweise die Koordinaten $(x,\, y)$ eines Punktes in einem zweidimensionalen Koordinatensystem, können somit als Tupel bezeichnet werden.

Innerhalb einer Woche können somit zehn Millionen verschiedene Anordnungen der Zitate auftreten.

Kombinationen

Bei einer Kombination wird aus einer Menge von n-Elementen eine Auswahl an k Elementen entnommen; dabei wird die Reihenfolge der entnommenen Elemente *nicht* berücksichtigt.

Kombinationen ohne Wiederholung

Um k Elemente in einer bestimmten Reihenfolge aus einer Menge mit n Elementen auszuwählen, gibt es, wie im Abschnitt *Variationen ohne Wiederholung* besprochen, $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. Hierbei wurde allerdings jede Reihenfolge der k Elemente als eigene Möglichkeit angesehen. Soll die Reihenfolge der entnommenen Elemente nicht berücksichtigt werden, so muss die Gesamtzahl $\frac{n!}{(n-k)!}$ durch die Anzahl der möglichen Anordnungen der k Elemente dividiert werden (also durch $k!$).

Die sich ergebende Größe heißt Binomialkoeffizient und wird folgendermaßen dargestellt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \tag{195}$$

Die Werte der Binomialkoeffizienten lassen sich als so genanntes “Pascalsches Dreieck” anordnen. Da bei der Nummerierung der Zeilen und Spalten mit $n = 0$ beziehungsweise $k = 0$ begonnen wird, befindet sich der Koeffizient $\binom{n}{k}$ in der $(n+1)$-ten Zeile an der $(k+1)$-ten Stelle.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7} \\
\ldots
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
\ldots
\end{array}$$

Abb. 162: Das Pascalsche Dreieck

Jede Zahl ist die Summe der beiden darüber liegenden Zahlen. Die Werte Binomialkoeefizienten können somit rekursiv nach folgender Formel berechnet werden:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Beispiel:

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, $k = 3$ Kugeln aus einer Schale mit $n = 10$ durchnummerierten Kugeln zu entnehmen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt?

  Durch Einsetzen von $k = 3$ und $n = 10$ in Gleichung (195) erhält man:

  $$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{720}{6} = 120$$

  Es gibt somit 120 verschiedene Möglichkeiten, aus zehn nummerierten Kugeln drei Stück auszuwählen.

Kombinationen mit Wiederholung

Wird aus einer Menge mit n Elementen eine Anzahl an $k \le n$ Elementen entnommen, wobei jedes Element mehrfach vorkommen darf und die Reihenfolge der entnommenen Elemente nicht berücksichtigt wird, so spricht man von einer Kombination mit Wiederholung.[2] Hierfür gibt es folgende Anzahl an Möglichkeiten:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} \tag{196}$$

Formal ist diese Formel mit der Binomialkoeffizienten-Gleichung (195) identisch, wenn man n durch den Wert $(n+k-1)$ ersetzt.

Beispiel:

- Wie viele Möglichkeiten gibt es bei einem $k = 3$-fachen Werfen eines Würfels mit $n = 6$ verschiedenen Seiten, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt?

  Durch Einsetzen von $k = 3$ und $n = 6$ in Gleichung (196) erhält man:

  $$\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

  Es gibt bei dreimaligem Werfen des Würfels somit 56 verschiedene Kombinationen an erhaltenen Werten.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition:

Bei einem Zufallsexperiment mit der Ergebnismenge Ω werden zwei Ereignisse M_1 und M_2 mit $P(M_1) > 0$ betrachtet. Dann bezeichnet man folgenden Ausdruck als bedingte Wahrscheinlichkeit von M_2 unter der Bedingung M_1:

$$P_{M_1}(M_2) = \frac{P(M_1 \cap M_2)}{P(M_1)}$$

[2] Da jedes Element mehrfach vorkommen darf, ist bei Kombinationen mit Wiederholung auch $k > n$ möglich.

Handelt es sich bei $P(M_1)$ und $P(M_2)$ um Laplace-Wahrscheinlichkeiten, so gilt:

$$P_{M_1}(M_2) = \frac{P(M_1 \cap M_2)}{P(M_1)} = \frac{|M_1 \cap M_2|}{|M_1|}$$

Die obige Definition lässt sich auch, insbesondere bei der Nutzung von Baumdiagrammen, als Produktsatz formulieren. Es gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl M_1 als auch M_2 eintreten:

$$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \cdot P_{M_1}(M_2)$$

Für bedingte Wahrscheinlichkeiten gelten zudem folgende Regeln:

- Multiplikationsregel: In einem Ergebnisbaum stellt jeder Knoten ein Elementarereignis dar. Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses entspricht dabei dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse längs des zugehörigen Weges.
- Additionsregel: Besteht ein Ereignis in einem Ereignisbaum aus mehreren Wegen, so ist die zugehörige Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Wege.

Stochatisch unabhängige Ereignisse

Ein Ereignis M_2 ist von einem Ereignis M_1 unabhängig, wenn M_1 auf die Wahrscheinlichkeit von M_2 keinen Einfluss hat.

Definition:

Ist Ω die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments und M_1 und M_2 zwei Ereignisse mit $P(M_1) > 0$, so nennt man M_2 stochastisch unabhängig von M_1, wenn gilt:

$$P_{M_1}(M_2) = P(M_2)$$

Andernfalls heißt M_2 stochastisch abhängig von M_1.

Ist ein Ereignis M_2 stochastisch unabhängig vom Ereignis M_1, so ist umgekehrt auch M_1 stochastisch unabhängig von M_2, denn in diesem Fall gilt:

$$P_{M_2}(M_1) = \frac{P(M_1 \cap M_2)}{P(M_2)} = \frac{P(M_1)(M_2) \cdot P(M_1)}{P(M_2)} = \frac{P(M_2) \cdot P(M_1)}{P(M_2)} = P(M_1)$$

Als Sonderfall von stochastischer Unabhängigkeit gilt $P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2)$ stets auch dann, wenn die Wahrscheinlichkeit von mindestens einem der beiden Ereignisse gleich Null ist. Allgemein gilt für alle stochastisch unabhängigen Ereignisse:

$$M_1 \text{ und } M_2 \text{ sind stochastisch unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2)$$

Sind zwei Ereignisse M_1 und M_2 stochastisch unabhängig, so gilt dies auch für die Gegenereignisse. In diesem Fall sind somit auch die Ereignisse $M_1 \cap \overline{M}_2$, $\overline{M}_1 \cap M_2$ sowie $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$ stochastisch unabhängig.

Bernoulli-Experimente

Als Bernoulli-Experiment bezeichnet man ein Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ergebnissen. Meist verwendet man dabei als Ergebnismenge $\Omega = \{0, 1\}$, wobei 1 als Symbol für das Eintreten des Ereignisses ("Treffer") und 0 als Symbol für das Nichteintreten des Ereignisses ("Niete") benutzt wird. Zusätzlich ist es üblich, mit $p = P(\{1\})$ die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer und mit $q = P(\{0\})$ die Wahrscheinlichkeit für eine Niete zu bezeichnen.

Wird ein Bernoulli-Experiment mehrfach durchgeführt, wobei sich die einzelnen Versuchen nicht beeinflussen und die Trefferwahrscheinlichkeiten bei allen Versuchen gleich groß sind, so spricht man von einer Bernoulli-Kette. Eine solche Bernoulli-Kette lässt sich ebenfalls durch einen Ergebnisbaum veranschaulichen.

Betrachtet man ein Ereignis mit genau k Treffern, so lassen sich mittels des Ergebnisbaums folgende Gesetzmäßigkeiten herleiten:

- Jeder einzelne Weg im Ereignisbaum, der über k Einsen und $n-k$ Nullen führt, setzt sich aus k Teilstücken mit der Wahrscheinlichkeit p sowie $(n-k)$ Teilstücken mit der Wahrscheinlichkeit $q = (1-p)$ zusammen. Nach der Multiplikationsregel für bedingte Wahrscheinlichkeiten ist somit die Wahrscheinlichkeit für jeden Weg mit genau k Treffern gleich $p^k \cdot q^{n-k}$.
- Um die Anzahl an Wegen mit genau k Einsen zu ermitteln, muss bestimmt werden, auf wie viele verschiedene Arten es möglich ist, k Einsen auf n Stellen zu verteilen. Es handelt sich hierbei um Kombinationen ohne Wiederholung, da jeder Weg nur einmal gezählt werden darf und die Reihenfolge, in der die einzelnen Wege gezählt werden, ohne Bedeutung ist. Dies entspricht dem klassischen "Lotto-Problem", d.h. es gibt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ verschiedene Kombinationen.

Aus beiden Eigenschaften ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Bernoulli-Kette mit einer Länge n und einer Wahrscheinlichkeit p genau $T = k$ Treffer auftreten:

$$P(T = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \tag{197}$$

Diese Formel wird häufig als "Formel von Bernoulli" bezeichnet.

Summenwahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten

Bezeichnet man bei einer Bernoulli-Kette mit einer Länge n und einer Trefferwahrscheinlichkeit p das Ereignis "genau k Treffer" mit M_{k}, so gilt:

$$P(T \le k) = P(M_0 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_{\mathrm{k}})$$

und

$$P(T \ge k) = P(M_{\mathrm{k}} \cup M_{\mathrm{k+1}} \cup \ldots \cup M_{\mathrm{n}})$$

Alle Ereignisse M_i, die jeweils $T = i$ Treffer bedeuten, sind paarweise stochastisch unabhängig; die einzelnen Wahrscheinlichkeiten können also addiert werden.

Für ein Bernoulli-Experiment mit einer Länge n und einer Trefferwahrscheinlichkeit p gelten somit folgende Regeln:

- Für mindestens k Treffer:

$$P(T \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

- Für höchstens k Treffer:

$$P(T \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

- Für mindestens l und höchstens k Treffer:

$$P(l \leq T \leq k) = \sum_{i=l}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

... to be continued ...

Beschreibende Statistik

In der beschreibenden Statistik geht es um die Erfassung, Auswertung und Darstellung von experimentell oder empirisch gewonnenen Daten. Dabei werden eÂndliche Mengen an Objekten hinsichtlich bestimmter Eigenschaften untersucht. Dabei werden allgemein folgende Schritt durchlaufen:

- Zunächst müssen in der beschreibenden Statistik alle für die Analyse relevanten Daten vollständig erhoben werden.
- Das bei der Daten-Erhebung gewonnene, oftmals sehr umfangreiche Datenmaterial muss als nächstes in eine übersichtliche Form gebracht werden, üblicherweise in eine Tabelle oder eine Graphik.
- Anschließend kann mit der Analyse der Daten begonnen werden. Hierbei lassen sich die Daten beispielsweise mittels wichtiger Kennzahlen wie Mittelwert und Streuungsmaß charakterisieren, ebenso können beispielsweise zeitliche Trends oder Abhängigkeiten zwischen mehreren Größen untersucht werden.
- Zuletzt können die Ergebnisse der Analyse interpretiert werden.

Merkmale, Merkmalsträger und Grundgesamtheit

Als (Untersuchungs-)Merkmal wird die interessierende statistische Information bezeichnet. Ein einzelnes Objekt, das dieses Merkmal besitzt, nennt man Merkmalsträger. Die möglichen Werte, die ein Merkmal annehmen kann, heißen Merkmalswerte oder Ausprägungen dieses Merkmals.[1]

Die Menge an Objekten G, die hinsichtlich einem oder mehrerer zu untersuchender Merkmale gleichwertig sind, wird als "Grundgesamtheit" oder "Population" bezeichnet. Bei der Festlegung der Grundgesamtheit werden müssen klare Abgrenzungen getroffen werden, beispielsweise müssen räumliche oder zeitliche Einschränkung vorliegen; die Mitglieder der Grundgesamtheit müssen somit nicht nur Träger des Untersuchungsmerkmals sein, sondern auch übereinstimmende Abgrenzungsmerkmale besitzen.

[1] Ein Merkmal kann auch als eine Abbildung $X : G \to M$ aufgefasst werden, welche die einzelnen Merkmalsträger $g \in G$ auf Ausprägungen $m \in M$ abbildet:

$$X(g) = m$$

Eine derartige Abbildung ist nicht zwingend eindeutig: Ein Merkmalsträger kann mehrere Merkmals-Ausprägungen aufweisen; beispielsweise kann eine Person in mehreren Vereinen aktiv sein, mehrere Sprachen sprechen usw.

Beispiel:

- Bei einem naturwissenschaftlichen Experiment sind die einzelnen Messungen die Merkmalsträger, die ihrerseits Messdaten als Merkmale enthalten.
- Bei einer Inventur werden zu einem bestimmten Zeitpunkt alle Objekte eines räumlich abgegrenzten Bereichs beispielsweise hinsichtlich ihrer Funktionsfähigkeit als Merkmal untersucht.

Die Mächtigkeit $n = |G|$ der Grundgesamtheit ist gleich der Anzahl ihrer Objekte. In Tabellen werden die einzelnen zu untersuchenden Merkmale häufig einem Buchstaben A, B ... zugeordnet, die einzelnen zu einem jeweiligen Merkmalsträger gehörenden Merkmalswerte werden zeilenweise durchnummeriert und in der jeweiligen Spalte eingetragen.

Meist ist bei einer Daten-Erhebung nicht möglich, alle Mitglieder der Grundgesamtheit zu untersuchen ("Vollerhebung"). In diesem Fall muss sich die Statistik mit einer kleineren, möglichst repräsentativen Stichprobe auskommen und von dieser auf die Gesamtheit schließen.

Qualitative und quantitative Merkmale

Merkmale können allgemein in zwei Gruppen unterteilt werden:

- *Qualitative* Merkmale lassen sich nur verbal beschreiben, es können nur Namen oder Klassenbezeichnungen als Werte vorkommen.

  Handelt es sich bei den Merkmalswerten um Namen, so spricht man auch von artmäßigen Merkmalen. Beispiele für derartige Merkmale sind Familiennamen, Geschlecht, Farbbezeichnungen, usw.

  Handelt es sich bei den Merkmalswerten um Klassenbezeichnungen, so spricht man auch von intensitätsmäßig abgestuften Merkmalen. Ein Beispiele hierfür sind Schulnoten ("sehr gut", "gut", usw.).

  Qualitative Merkmale lassen sich zudem in "häufbare" und "nicht häufbare" Merkmale unterscheiden. Ein qualitatives Merkmal ist häufbar, wenn ein Merkmalsträger mehrere Merkmalswerte gleichzeitig aufweisen kann; beispielsweise kann eine Person gegebenenfalls mehrere Berufsausbildungen absolviert haben. Ein qualitatives Merkmal ist nicht häufbar, wenn ein Merkmalsträger nur genau einen Merkmalswert aufweisen kann; beispielsweise hat jede Person genau eine Augenfarbe.

- *Quantitative* Merkmale können als Vielfaches einer Einheit ausgedrückt werden, beispielsweise Zeitdauer, Energiebedarf, usw.

  Können bei einem quantitativen Merkmal nur ganzzahlige Werte auftreten, so spricht man von einem diskreten Merkmal. Ein Beispiel hierfür sind Stückzahlen.

  Können bei einem quantitativen Merkmal beliebige Werte auftreten, so spricht man von einem stetigen oder kontinuierlichen Merkmal. Beispiele hierfür sind Zeitdauern, Längenangaben, usw.

Um eine Vielzahl unterschiedlicher quantitativer Messwerte abzubilden, können diese in einzelne Intervalle zusammengefasst werden. Anstelle (sehr) viele Einzelergebnisse aufzulisten, genügt es damit, die Anzahl an Werten in den einzelnen Intervallen anzugeben. Üblicherweise werden zwischen 5 und 20 einzelne Intervallen mit jeweils gleich großen Intervallen und eindeutig zuzuordnenden Intervallgrenzen gewählt. Durch diese Methode gehen zwar einerseits die statistischen Informationen der Einzelmessungen teilweise verloren, andererseits werden dafür die Ergebnisse "komprimiert" und somit übersichtlicher.

Statistische Mess-Skalen

Mittels einer Mess-Skala können die möglichen Merkmalswerte nach bestimmten Ordnungsprinzipien darstellt werden. Für qualitative Merkmale werden Nominal- oder Ordinalskalen verwendet, für quantitative Merkmale kommen oftmals Intervall- oder Verhältnisskalen zum Einsatz. Im folgenden Abschnitt werden diese Skalen näher beschrieben.

Nominalskala

Eine Nominalskala hat die möglichen Namen eines quantitativen Merkmals als Skalenwerte. Diese werden gleichberechtigt nebeneinander angeordnet. Die einzelnen Namen können zur Unterscheidung von artmäßigen Merkmalen genutzt werden, entsprechen jedoch keiner Rangordnung. Nehmen die einzelnen Namen zu viel Platz ein, so können ihnen auch Abkürzungen oder Nummern als Schlüsselwerte zugewiesen werden.

Ordinalskala

Eine Ordinalskala hat die Klassenbezeichnungen eines quantitativen Merkmals als Skalenwerte. Im Gegensatz zu einer Nominalskala sind die einzelnen Klassenbezeichnungen nicht gleichwertig, sondern entsprechen einer Rangordnung in auf- oder absteigender Folge.

Intervall- und Verhältnisskala

Bei diesen beiden Skalentypen handelt es sich um metrische Skalen, vergleichbar mit einem Meterstab. Als Skalenwerte werden Vielfache einer Grundeinheit abgetragen.

Eine metrische Skala heißt Intervallskala, wenn der Nullpunkt willkürlich gewählt ist; in diesem Fall können zwar Differenzen zwischen zwei Werten sinnvoll interpretiert werden, Quotienten hingegen nicht; Beispielsweise entsprechen 20 °C nicht einer doppelt so hohen Temperatur wie 10 °C, wenn man vom absoluten Temperaturnullpunkt $T_0 = -273\,°C$ ausgeht.

Ist der Nullpunkt einer Skala eindeutig festgelegt, so spricht man von einer Verhältnisskala. In diesem Fall sind auch Quotienten von einzelnen Werten sinnvoll interpretierbar. Beispiele hierfür sind Gewichtsangaben, Geldmengen, Stückzahlen, absolute Temperaturangaben usw.

Graphische Darstellungen statistischer Daten

Bisweilen ist es praktisch, statistische Informationen als Diagramme graphisch darzustellen; diese müssen einerseits eindeutig beschriftet sein und sollten andererseits möglichst übersichtlich gestaltet werden.

- Bei einem Histogramm werden auf der waagrechten Achse die einzelnen Intervall- oder Klassengrenzen abgetragen. Über den einzelnen Intervallen werden Rechtecke gezeichnet, deren Höhe die absoluten oder relativen Häufigkeiten des jeweiligen Intervalls oder der jeweiligen Klasse darstellen.
- Todo: Tortendiagramm, Liniendiagramm, Boxplot usw.

Umgang mit ungenauen Messwerten

Als Messfehler werden Differenzen zwischen gemessenen Werten und den unbekannten wahren Werten der jeweiligen Messgrößen bezeichnet. Sie lassen sich grundsätzlich in zwei Arten unterteilen – in systematische und statistische (zufällige) Fehler.

Systematische Fehler

Systematische Fehler entstehen durch mangelhafte Messverfahren, beispielsweise durch defekte Messgeräte, falsche Eichungen, oder Vernachlässigung von störenden Einflussgrößen. Je nach Fehler weichen die gemessenen Werte entweder nach oben oder nach unten von den tatsächlichen Werten ab.

Systematische Fehler werden "reproduzierbar" genannt, denn bei erneuten Messvorgängen treten sie unter gleichen Bedingungen erneut auf. Wird der Fehler gefunden, so kann er berücksichtigt und eventuell korrigiert werden.

Statistische Fehler

Statistische Fehler entstehen zufällig, beispielsweise durch Schwankungen in Messgeräten oder durch ein ungenaues Ablesen von analogen Messgeräten. Die Abweichungen der gemessenen Werte können unabhängig vom Fehler sowohl nach oben als auch nach unten von den tatsächlichen Werten abweichen.

Statistische Fehler können nicht nie komplett vermieden werden. Die Messgenauigkeit kann jedoch erhöht werden, indem mehrere Messungen oder Stichprobentests unter gleichen Bedingungen durchgeführt werden.

Die Summe aller nicht erfassbaren systematischen und zufälligen Fehler ergibt den Größtfehler einer Datenaufnahme beziehungsweise Messung.

Setzt sich ein Ergebnis rechnerisch aus mehreren gemessenen Größen zusammen, so hat auch dieses einen Fehler, der sich aus den Fehlern der Einzelgrößen ergibt. Dabei gelten für verschiedene Rechenoperationen verschiedene Regeln:

- Bei Summen und Differenzen (also $y = x_1 + x_2$ oder $y = x_1 - x_2$) werden die Absolutfehler der Einzelgrößen quadriert und addiert; die Quadratwurzel aus diesem Wert liefert schließlich den Fehler der Ergebnisgröße:

$$\Delta y = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$$

- Bei Produkten und Quotienten (also $y = x_1 \cdot x_2$ oder $y = x_1 : x_2$) werden die relativen Fehler unter der Wurzel quadratisch addiert:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}$$

- Bei Potenzen und Wurzeln (also $y = x_1^{x_2}$) wird der relative Fehler von y bestimmt durch

$$\frac{\Delta y}{y} = x_2 \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1}$$

  Dies gilt auch für $x_2 < 1$ (Wurzeln).

Mittelwerte und Streuungsmaße

Nicht nur bei der Fehlerrechnung hat man bei statistischen Analysen als Ziel, die Gesamtheit aller Merkmalswerte mit einigen charakteristischen Größen zusammenzufassen; diese sollten beispielsweise einen durchschnittlichen Wert sowie die Streuung der Merkmalswerte um diesen Durchschnittswert beziffern.

Mittelwerte

Mit "Mittelwert" bezeichnet man umgangssprachlich meist das so genannte arithmetische Mittel; bisweilen sind allerdings auch andere Durchschnittswerte wie Median- oder Modalwerte besser zur Beschreibung einer Häufigkeitsverteilung geeignet.

Arithmetisches Mittel

Hat man eine Folge von n gemessenen Elementarereignissen vorliegen, so schwanken die Messwert x_i der Ereignisse um den Mittelwert $\bar{x}$, der folgendermaßen definiert ist:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{\mathrm{i}} \tag{198}$$

Der Mittelwert $\bar{x}$ wird auch als "arithmetisches Mittel" der Zahlenfolge bezeichnet. Die Abweichungen der einzelnen Ereignisse x_{i} von diesem Mittelwert betragen:

$$\Delta x_{\mathrm{i}} = x_{\mathrm{i}} - \bar{x}$$

Der Mittelwert ist zwar anschaulich und einfach zu berechnen, allerdings empfindlich gegen unerwartet hohe beziehungsweise niedrige Merkmalswerte, so genannte "Ausreißer".

Gewichtetes arithmetisches Mittel

Das gewichtete (arithmetische) Mittel ist arithmetische Mittel einer Häufigkeitsverteilung. Man verwendet diesen Wert, wenn die Merkmalswerte mit unterschiedlichen Häufigkeiten gewichtet sind.

Um das gewichtete Mittel zu berechnen, multipliziert man zunächst die unterschiedlichen Merkmalswerte x_{i} mit ihrer jeweiligen *Häufigkeit* z_{i}; anschließend addiert man alle resultierenden Produkt-Werte und teilt das Ergebnis durch die Anzahl n aller Messungen:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} z_{\mathrm{i}} \cdot x_{\mathrm{i}} \tag{199}$$

Hat man anstelle der (absoluten) Häufigkeiten z_{i} die relativen Häufigkeiten $h_{\mathrm{i}} = \frac{z_{\mathrm{i}}}{n}$ gegeben, so genügt es, diese mit den jeweiligen Merkmalswerten x_{i} zu multiplizieren und die resultierenden Produkte zu addieren:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} z_{\mathrm{i}} \cdot x_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{n} \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} h_{\mathrm{i}} \cdot x_{\mathrm{i}} \tag{200}$$

Beispiel:

- Bei der Statistischen Erhebung "Mikrozensus 2015" hat sich die in der folgenden Tabelle dargestellte Häufigkeitsverteilung für die Anzahl an Kindern (unter 18 Jahren) in Haushalten und Familien ergeben (Quelle: Destatis). Wie viele Kinder gibt es durchschnittlich je Familie?

Kinder je Haushalt	Anzahl z an Familien in 1000
0	3 376
1	4 251
2	2 916
3	697
4	126
5 (oder mehr)	42
Insgesamt	11 408

  Da die unterschiedlichen Kinder-Anzahlen unterschiedlich gewichtet sind, muss zur Bestimmung des Durchschnittwerts mit der Formel für das gewichtete arithmetische Mittel gerechnet werden:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} z_{\mathrm{i}} \cdot x_{\mathrm{i}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{11\,408} \cdot (3\,376 \cdot 0 + 4\,251 \cdot 1 + 2\,916 \cdot 2 + 697 \cdot 3 + 126 \cdot 4 + 42 \cdot 5) \approx 1,13$$

  Je Familie gibt es in Deutschland somit durchschnittlich (nur) rund $1,13$ Kinder unter 18 Jahren.

Geometrisches Mittel

Sind die Merkmalswerte relative Änderungen, wie es beispielsweise bei Wachstumraten oder Leistungssteigerungen der Fall ist, so wird bevorzugt das geometrische Mittel $\bar{x}_{\mathrm{G}}$ als Durchschnittswert verwendet. Sie die einzelnen Merkmalswerte $x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}}$ allesamt positiv, so kann das geometrische Mittel $\bar{x}_{\mathrm{G}}$ folgendermaßen berechnet werden:

$$\bar{x}_{\mathrm{G}} = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{\mathrm{n}}} \tag{201}$$

Beispiel:

- In einer bestimmten Bakterien-Kultur erhöhte sich in drei Tagen die Zahl der Bakterien pro Einheit von 100 auf 700. Gefragt ist nach der durchschnittlichen prozentualen Zunahme (je Tag).

  Die durchschnittliche Zunahme soll mit x bezeichnet werden. Für die Zahl der Bakterien nach dem ersten Tag ergibt sich damit:

  $$100 + 100 \cdot x = 100 \cdot (1 + x)$$

  Für den zweiten Tag ist der Wert $100 \cdot (1+x)$ der neue Ausgangswert. Stellt man die obige Gleichung für den zweiten Tag auf, so muss also lediglich 100 durch $100 \cdot (1+x)$ ersetzt werden. Man erhält als Anzahl der Bakterien nach dem zweiten Tag:

  $$100 \cdot (1 + x) + 100 \cdot (1 + x) \cdot x = 100 \cdot (1 + x)^2$$

  Hierbei wurde zunächst der gemeinsame Faktor 100 ausgeklammert und anschließend der resultierende Term zusammengefasst: $100 \cdot [(1 + x) + (1 + x) \cdot x] = 100 \cdot (1 + x + x + x^2)$. Der Term in der Klammer kann als $(1 + 2 \cdot x + x^2)$ geschrieben werden und entspricht somit der binomischen Formel $(1 + x)^2$.

  Für den dritten Tag erhält man mit $100 \cdot (1 + x)^2$ als neuem Ausgangswert:

  $$100 \cdot (1 + x)^2 + 100 \cdot (1 + x)^2 \cdot x = 100 \cdot (1 + x)^3$$

  Hierbei wurde zunächst wiederum der gemeinsame Faktor 100 ausgeklammert und anschließend der resultierende Term in der Klammer ausmultipliziert. Man erhält so $100 \cdot [(1 + 2 \cdot x + x^2) + (x + 2 \cdot x^2 + x^3)]$, was sich zu $100 \cdot (1 + 3 \cdot x + 3 \cdot x^2 + x^3)$ zusammenfassen lässt; dies entspricht wiederum der binomischen Formel $(1 + x)^3$.

  Der Wert des letzten Ausdrucks soll gemäß der Angabe gleich 500 sein; es muss also gelten:

  $$\begin{aligned} 100 \cdot (1 + x)^3 &= 700 \\ \Rightarrow (1 + x)^3 &= \frac{700}{100} \\ (1 + x) &= \sqrt[3]{\frac{700}{100}} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{700}{100}} - 1 \approx 0,91 \end{aligned}$$

  Die durchschnittliche Wachstumsrate beträgt somit rund 91%.

Es kann gezeigt werden, dass das geometrische Mittel einer Merkmals-Reihe der Länge n allgemein nach diesem Prinzip berechnet werden kann:

$$\bar{x}_{\mathrm{G}} = \sqrt[n]{\frac{\text{Endwert}}{\text{Anfangswert}}} \tag{202}$$

Hat ein Merkmal zu Beginn der Messungen einen Wert w_1, so erhält man allgemein bei einem gleichmäßigen Wachstum über n Zeitschritte den neuen Wert w_2 gemäß folgender Formel:

$$w_2 = w_1 \cdot (1 + x)^n$$

Hierbei bezeichnet x wiederum die Zuwachsrate je Zeitschritt.

Beispiel:

- Der Wert einer Aktie, deren Kaufpreis 50 Eur betrug, stieg im ersten Jahr auf 70 Eur, fiel jedoch im zweiten Jahr auf 40 Eur. Wie groß ist die mittlere Wachstumsrate?

  Für die relative Wachstumsrate x_1 im ersten Jahr gilt:

  $$x_1 = \frac{70}{50} = 1,4$$

  Für die relative Wachstumsrate x_2 im zweiten Jahr gilt dafür:

  $$x_2 = \frac{40}{70} \approx 0,5714$$

  Für das geometrische Mittel $\bar{x}_{\mathrm{G}}$ zwischen diesen beiden Werten beträgt:

  $$\bar{x}_{\mathrm{G}} = \sqrt{x_1 \cdot x_2} = \sqrt{1,4 \cdot 0,5714} \approx 0,8944$$

  Der Wert des geometrischen Mittels ist in diesem Fall kleiner als 1, was eine Verringerung des ursprünglichen Werts bedeutet. Die jährliche "Wachstumsrate" beträgt also $0,8944 - 1 \approx -0,1056$, also rund $-10,56\%$.

Wie man an den beiden Beispielen erkennen kann, wird das geometrische Mittel vor allem zur Bestimmung des Durchschnittswertes von Verhältniszahlen genutzt, wobei die Veränderungen meist in jeweils gleichen zeitlichen Abschnitten angegeben sind.

Harmonisches Mittel

Das harmonische Mittel wird dann verwendet, wenn die Merkmalswerte in Form von Quotienten vorliegen, wie dies beispielsweise bei der Berechnung von Durchschnitts-Geschwindigkeiten oder Bevölkerungsdichten der Fall ist.

Die einzelnen Merkmalswerte $x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}}$ müssen allesamt positiv oder allesamt negativ sein; das harmonische Mittel $\bar{x}_{\mathrm{H}}$ lässt sich dann schrittweise folgendermaßen berechnen:

- Man dividiert die einzelnen Merkmalswerte x_{i} durch ihre jeweiligen (absoluten) Häufigkeiten z_{i} und bildet dabei jeweils die Kehrwerte der Ergebnisse.

- Alle so erhaltenen Kehrwerte werden aufsummiert und der Kehrwert dieser Summe gebildet.
- Der Kehrwert dieser Summe wird mit der Anzahl $n = \sum z_{\mathrm{i}}$ multipliziert.

Die Formel zur Berechnung des harmonischen Mittels lautet also:

$$\bar{x}_{\mathrm{H}} = \frac{z_1 + z_2 + \ldots}{\frac{z_1}{x_1} + \frac{z_2}{x_2} + \ldots} = \frac{\sum z_{\mathrm{i}}}{\sum \frac{z_{\mathrm{i}}}{x_{\mathrm{i}}}} \tag{203}$$

Beispiele:

- Ein Fahrradfahrer fährt eine 5 km lange Strecke zunächst mit 10 km/h bergauf, anschließend mit 30 km/h bergab. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrers?

  Die beiden auftretenden Merkmalswerte sind $x_1 = 10\,\mathrm{km/h}$ und $x_2 = 30\,\mathrm{km/h}$; sie treten mit den Häufigkeiten $z_1 = z_2 = 5\,\mathrm{km}$ auf. Da es sich bei den Merkmalswerten um Quotienten handelt, muss zur Berechnung des Durchschnittswertes auf das harmonische Mittel zurückgegriffen werden:

  $$\bar{x}_{\mathrm{H}} = \frac{z_1 + z_2}{\frac{z_1}{x_1} + \frac{z_2}{x_2}} = \frac{(5+5)\,\mathrm{km}}{\frac{5\,\mathrm{km}}{10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} + \frac{5\,\mathrm{km}}{30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}} = 15\,\mathrm{km/h}$$

  Die geringe Geschwindigkeit fällt stärker ins Gewicht, da der Fahrer bergauf mehr Zeit benötigt als bergab.

- Die Bevölkerungszahlen der Bundesländer Bayern und Baden-Württemberg sind in der folgenden Tabelle dargestellt (Quelle: Wikipedia, Stand: Dezember 2016). Wie viel Einwohner je km^2 gibt es durchschnittlich in diesen beiden Ländern?

Land	Fläche in km^2	Einwohner	Einwohner je km^2
Baden-Württemberg	35 751	10 879 618	304
Bayern	70 550	12 843 514	182

  Sind auch die absoluten Einwohnerzahlen bekannt, so kann man diese aufsummieren und das Resultat durch die Gesamtfläche dividieren. Kennt man hingegen nur die Einwohnerzahlen je km^2, so kann man zur Berechnung des Durchschnittswerts die Formel für das harmonische Mittel verwenden:

  $$\bar{x}_{\mathrm{H}} = \frac{z_1 + z_2}{\frac{z_1}{x_1} + \frac{z_2}{x_2}} = \frac{(35\,751 + 70\,550)\,\mathrm{km}^2}{\frac{35\,751\,\mathrm{km}^2}{304\,\frac{1}{\mathrm{km}^2}} + \frac{70\,550\,\mathrm{km}^2}{182\,\frac{1}{\mathrm{km}^2}}} \approx 210,4\,\frac{1}{\mathrm{km}^2}$$

  Die durchschnittliche Bevölkerungsdichte in diesen beiden Bundesländern liegt somit unterhalb des Durchschnittwerts für ganz Deutschland (laut obiger Quelle rund $230\,\frac{1}{\mathrm{km}^2}$, Stand: Dezember 2016).

Wie man an den Beispielen erkennen kann, wird das harmonische Mittel dann verwendet, wenn die Gewichtungen in der gleichen Einheit vorliegen wie der Zähler oder der Nenner des Merkmals.

Median

Wesentlich unempfindlicher gegenüber Ausreißern ist der so genannte Medianwert. Sortiert man alle Merkmalswerte in aufsteigender Reihenfolge, so entspricht der Medianwert genau dem Wert, der sich in der Mitte dieser Liste befindet.

- Bei einer Liste mit einer *ungeradzahligen* Anzahl von n Elementarereignissen entspricht der mittlere Platz der Position $\frac{n+1}{2}$ in der Liste; der Medianwert entspricht somit dem Wert $x_{\left[\frac{\mathrm{n}+1}{2}\right]}$ der Liste:

$$Me = x_{\left[\frac{\mathrm{n}+1}{2}\right]}$$

- Bei einer Liste mit einer *geradzahligen* Anzahl von n Elementarereignissen entspricht der Median dem Durchschnitt aus den beiden mittig gelegenen Werten:

$$Me = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\left[\frac{\mathrm{n}+1}{2}\right]} + x_{\left[\frac{\mathrm{n}+1}{2}\right]} \right)$$

Der Median ist somit ebenfalls schnell und einfach zu bestimmen.

Modalwert

Der Modalwert, bisweilen auch "Modus" genannt, gibt den Wert einer Messreihe an, der am häufigsten beobachtet wurde. Üblicherweise wird der Modalwert nur dann verwendet, wenn sich die damit verbundene Häufigkeit deutlich von den restlichen Häufigkeiten unterscheidet; der Modalwert sollte also ein herausragender Wert sein.

Da die restlichen Merkmalswerte unberücksichtigt bleiben, wird der Modalwert von Ausreißern nicht beeinflusst.

Streuungsmaße

Zusätzlich zum Mittelwert sollte stets (mindestens) ein Streuungsmaß angegeben werden, das angibt, wie stark die tatsächlichen Merkmalswerte vom Mittelwert abweichen. Beispielsweise sind bei "genauen" Messungen die Abweichungen nur gering, während sie sich bei "ungenauen" Messungen über einen größeren Skalenbereich erstrecken.

Spannweite und Quantile

Als Spannweite R, im Englischen "range" genannt, bezeichnet man die Differenz aus dem größten und dem kleinsten beobachteten Merkmalswert:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Die Spannweite ist zwar ein einfaches und anschauliches Streuungsmaß, gibt allerdings keine näheren Informationen über die konkrete Verteilung der Merkmalswerte an und ist zudem anfällig gegenüber so genannten "Ausreißern", also einzelnen ungewöhnlich niedrigen oder hohen Werten.

Besser geeignet sind daher meist so genannte Quantils-Angaben: Hierbei sortiert man zunächst alle Merkmalswerte ihrer Größe nach und untergliedert diese dann in mehrere Teile:

- Bei Quartilen wird die Gesamtheit aller Merkmalswerte in vier gleich große Bereiche unterteilt.
- Bei Dezilen wird die Gesamtheit aller Merkmalswerte in zehn gleich große Bereiche unterteilt.

Die Berechnung der einzelnen Quantile erfolgt in ähnlicher Weise wie die Berechnung des *Median*-Werts; beispielsweise gibt das erste Quartil an, dass 25% aller Merkmalswerte kleiner und folglich 75% aller Werte größer als der Wert des ersten Quartils sind.[2] Der Wert des zweiten Quartils gibt entsprechend an, dass 50% der Merkmalswerte kleiner beziehungsweise größer als dieser Wert sind; dieser Wert ist somit mit dem Median-Wert identisch.

Standardabweichung

Als Schwankungsbreite wird gewöhnlich die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert angegeben. Diese Größe wird Standardabweichung σ genannt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{\mathrm{i}} - \bar{x})^2}$$

Die Standardabweichung ist, abgesehen von statistischen Schwankungen, unabhängig von der Anzahl n der Einzelmessungen.

... to be continued ...

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

---

[2] Zur Berechnung des ersten Quartilswert prüft man, ob man bei einer Merkmalsliste der Länge n für den Term $\frac{n+1}{4}$ eine ganzzahlige Zahl erhält. Ist dies der Fall, so gilt für den ersten Quartilswert:

$$q_1 = x_{\left[\frac{\mathrm{n}+1}{4}\right]}$$

Ist $\frac{n+1}{4}$ nicht ganzzahlig ist, so interpoliert man zwischen diesem und dem darauf folgenden Wert. Bezeichnet man den Nachkomma-Anteil von $\frac{n+1}{4}$ mit R, so ergibt sich als Formel für den ersten Quartilswert:

$$q_1 = x_{\left[\frac{\mathrm{n}+1}{4}\right]} + R \cdot \left(x_{\left[\frac{\mathrm{n}+1}{4}+1\right]} - x_{\left[\frac{\mathrm{n}+1}{4}\right]} \right)$$

Übungsaufgaben und Lösungen

Übungsaufgaben

Aufgaben zur Logik

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Logik*.

- Weshalb stellt folgende Gleichung eine Aussageform dar?

  $$x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$$

  Welcher Wahrheitswert ergibt sich für den Variablenwert $x = 1$, welcher für $x = 2$?

  Lösung

- Wie lässt sich die folgende Aussage in der mathematischen Kurzform ausdrücken?

  "Wenn eine Zahl x durch 10 teilbar ist, so ist sie auch durch 2 teilbar."

  Lösung

- Wie lassen sich die beiden folgenden beiden Aussagen in mathematischer Kurzform zu einer einzigen wahren Aussage zusammenfügen?

  A_1: "Das Viereck ist ein Quadrat."
  A_2: "Das Viereck hat vier gleich große Innenwinkel."

  Was für eine Art der Aussage erhält man hierbei, wenn man die zweite Aussage um den Zusatz "und es hat gleich lange Seiten" ergänzt?

  Lösung

- Weshalb sind folgende beide Aussagen aus rein logischer Sicht falsch formuliert?
  - "Rauchen UND Umgang mit offenen Licht ist verboten!"

– “Drink OR drive!”

Lösung

- Welche Aussage entsteht durch eine Adjunktion (ODER-Verknüpfung) der Aussagen $A_1: \; 1 < 2$ und $A_2: \; 1 = 2$? Welchen Wahrheitswert haben die beiden Aussagen A_1 beziehungsweise A_2, welchen die Gesamtaussage?

  Lösung

- Welche Aussage entsteht durch die Konjunktion (UND-Verknüpfung) der Aussagen A_1 : 134 ist durch 2 teilbar. und A_2 : 134 ist durch 3 teilbar.? Welchen Wahrheitswert haben die beiden Aussagen A_1 beziehungsweise A_2, welchen die Gesamtaussage?

  Lösung

- Welche Gesamt-Aussage ergibt sich durch eine Antivalenz der Aussagen “Der Zug fährt nach Hamburg” und “Der Zug fährt nach Buxtehude”?

  Lösung

- Welche Aussage ergit die Implikation der Aussagen “Die Erde ist ein Würfel” und “Die Sonne ist eine Pyramide”? Welchen Wahrheitswert hat diese Aussage?

  Lösung

- Welchen Wahrheitswert hat die Aussage $5 = 12 \; \vee \; \sqrt{16} = 4$?

  Lösung

Aufgaben zur Mengenlehre

Mengenoperationen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Mengenoperationen*.

- (*) Welche Ergebnismenge ergibt sich bei der Bildung der Vereinigungsmenge $\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2$, wenn $\mathbb{M}_1 = \{a, \, b, \, c, \, d\}$ und $\mathbb{M}_2 = \{b, \, c, \, d, \, e, \, f\}$ ist?

  Lösung

- (*) Welche Ergebnismenge ergibt sich bei der Bildung der Schnittmenge zweier Mengen $\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2$, wenn diese folgende Elemente beinhalten:

  a) $\mathbb{M}_1 = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$; $\mathbb{M}_2 = \{2,\, 4,\, 6,\, 8,\, 10\}$

  b) $\mathbb{M}_1 = \{a,\, b,\, c,\, d\}$; $\mathbb{M}_2 = \{m,\, n,\, o,\, p,\, q\}$

  c) $\mathbb{M}_1 = \{\frac{9}{3},\, 4,\, 5^2\}$; $\mathbb{M}_2 = \{3^3,\, \sqrt{9},\, 7\}$

  d) $\mathbb{M}_1 = \{x \,|\, x < 5\}$; $\mathbb{M}_2 = \{x \,|\, x \ge 3\}$

  Lösung

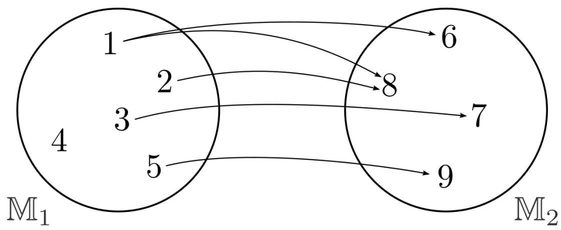
- (*) Wie lässt sich anhand der beiden Mengen $\mathbb{M}_1 = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}$ und $\mathbb{M}_2 = \{4,\, 5,\, 6,\, 7,\, 8,\, 9, 10\}$ zeigen, dass bei einer Differenzmenge $\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2$ die Mengen $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$ im Allgemeinen nicht vertauscht werden können?

  Lösung

Abbildungen und Funktionen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Abbildungen, Funktionen, Relationen und Operationen*.

- (*) In folgender Abbildung ist eine Abbildung von Elementen der Menge $\mathbb{M}_1$ auf Elemente der Menge $\mathbb{M}_2$ dargestellt.



  Wie lässt sich diese Abbildung als Menge darstellen? Kann die Abbildung auch als Funktion aufgefasst werden?

  Lösung

Aufgaben zur Arithmetik

Grundrechenarten und Rechenregeln

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Grundrechenarten und Rechenregeln*.

- (*) Wie lassen sich folgende Terme zusammenfassen?

  a) $3 \cdot a - 2 \cdot b - (6 \cdot a + 3 \cdot b) - (-3 \cdot a - b)$

  b) $5 \cdot a \cdot b \cdot (-2) \cdot b^2 \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot b \cdot c^2$

  Lösung

Bruchrechnung

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Bruchrechnung*.

- (*) Wie müssen die jeweiligen Definitionsbereiche eingeschränkt werden, damit folgende Bruchterme definiert sind?

  a) $\dfrac{5 \cdot a - 3}{4 \cdot a}$

  b) $\dfrac{2 \cdot a + 4 \cdot b}{b - 7}$

  c) $\dfrac{8}{(c + 3) \cdot (c - 2)}$

  d) $\dfrac{2 \cdot c \, + \, 5 \cdot d \, + \, 1}{3 \cdot d^2 + 1}$

  Lösung

- (*) Wie lassen sich folgende Bruchterme vereinfachen?

  a) $\dfrac{8 \cdot a - 3 \cdot b}{a^2 - b^2} - \dfrac{5 \cdot a - 6 \cdot b}{a^2 - b^2}$ mit $|a| \neq |b|$

  b) $\dfrac{c + d}{c - d} \cdot \dfrac{(c - d)}{(c + d)^2}$ mit $|c| \neq |d|$

  c) $\dfrac{8 \cdot e^2 \cdot f}{3 \cdot g \cdot h} : \dfrac{4 \cdot e \cdot f}{6 \cdot g^2 \cdot h^2}$ mit $e, f, g, h \neq 0$

  Lösung

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Potenzen, Wurzeln und Logarithmen*.

- (**) Wie lassen sich folgende Wurzelterme vereinfachen?

  a) $\sqrt[2]{16^3}$

  b) $(5 \cdot \sqrt{2})^2$

  c) $(\sqrt[2]{7})^4$

  d) $\sqrt[4]{a^8 \cdot b^4}^3$

  e) $\sqrt[3]{7 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt[3]{7}}}$

  f) $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[2]{6}}\right)^{-6}$

  Lösung

Aufgaben zur elementaren Algebra

Gleichungen

Lineare Gleichungen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Lineare Gleichungen*.

- Für welchen Wert x gilt die folgende Gleichung?

$$\frac{10 \cdot x + 3}{3} - 5 = 11 - \frac{3 \cdot x + 4}{2} - \frac{2 \cdot x + 6}{3}$$

  Lösung

Quadratische Gleichungen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Quadratische Gleichungen*.

- Welche Lösungsmengen haben folgende Gleichungen?

  a) $x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$

  b) $3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 15 = 0$

  Lösung

- Wie lässt sich folgende Gleichung mit Hilfe des Satzes von Vieta lösen?

$$x^2 - 9 \cdot x + 20 = 0$$

  Wie lautet die Produktform dieser Gleichung?

  Lösung

Algebraische Gleichungen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Algebraische Gleichungen höheren Grades*.

- Von der folgenden Gleichung dritten Grades sei die Lösung $x_1 = 3$ bekannt. Wie lauten die anderen beiden Lösungen der Gleichung?

$$x^3 - 6 \cdot x^2 - x + 30 = 0$$

Lösung

- Wie lauten die Lösungsmengen folgender Gleichungen?

a) $2 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 - 12 \cdot x = 0$

b) $x^4 - 13 \cdot x^2 + 36 = 0$

Lösung

Bruch-, Produkt- und Wurzelgleichungen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Bruch-, Produkt- und Wurzelgleichungen*.

Bruch- und Produktgleichungen

- Welche Lösungsmenge hat folgende Gleichung?

$$3 \cdot x \cdot (x - 5) = 6 \cdot (x - 5)$$

Lösung

- Welche Lösungsmenge hat folgende Gleichung?

$$\frac{3 \cdot x + 13}{2 \cdot x + 10} = \frac{4 - 3 \cdot x}{4 - 2 \cdot x}$$

Lösung

Wurzelgleichungen

- Weshalb hat die folgende Gleichung keine Lösung?

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{2-x}=1$$

Lösung

- Welche Lösungsmengen haben folgende Gleichungen?

a) $\sqrt{x+1}=x-5$

b) $\sqrt{3\cdot x+7}=2-2\cdot x$

Lösung

Exponential- und Logarithmusgleichungen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Exponential- und Logarithmusgleichungen*.

- Welche Lösungsmengen haben folgende Exponential-Gleichungen?

a) $3^x=12$

b) $2^{2\cdot x+2}=4^{3\cdot x-15}$

Lösung

- Welche Lösungsmengen haben folgende Logarithmus-Gleichungen?

a) $\log_x(125)=3$

b) $\log_5(3\cdot x-2)=4$

Lösung

Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Quadratische Ungleichungen*.

- Welche Lösungsmenge hat folgende Ungleichung?

$$x^2+9\cdot x+14<0$$

Lösung

Betragsungleichungen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Betragsungleichungen*.

- Welche Lösungsmenge hat folgende Ungleichung?

$$|x-1| < 4$$

Lösung

Lineare Gleichungssysteme

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Lineare Gleichungssysteme*.

- Welche Lösung hat das folgende Gleichungssystem?

$$\begin{aligned} \text{(I)}: \quad & 4\cdot x_1 + 2\cdot x_2 = -6 \\ \text{(II)}: \quad & 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 = -7 \end{aligned}$$

Lösung

- Am Ende eines Trainings prahlt ein Tennis-Spieler gegenüber dem anderen:
  "Hätte ich auch noch den letzten Satz gewonnen, so hätte ich insgesamt doppelt so viele Sätze gewonnen wie Du!"
  Daraufhin meint der andere:
  "Gib' doch nicht so an... hättest Du auch den vorletzten verloren, dann hätten wir jeweils gleich viele gewonnen!"
  Wie viele Sätze haben die beiden Spieler jeweils gewonnen?

Lösung

- Haben folgende Gleichungssysteme eine eindeutige Lösung? Wenn ja, wie lautet diese?

$$\text{a)} \qquad \begin{aligned} 2\cdot x_1 + 8\cdot x_2 &= 4 \\ -5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 &= 20 \\ 7\cdot x_1 + 4\cdot x_2 &= -16 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \qquad \begin{aligned} 3\cdot x_1 + 7\cdot x_2 &= 15 \\ 5\cdot x_1 - 4\cdot x_2 &= -2 \\ -2\cdot x_1 + 1\cdot x_2 &= -4 \end{aligned}$$

Lösung

- Wie lautet die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von x_3?

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 &= -6 \\ -1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 &= 4 \end{aligned}$$

  Lösung

Aufgaben zur elementaren Geometrie

Stereometrie

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Stereometrie*.

- Zum Reinigen einer Arbeitsfläche werden $V_{\text{ges}} = 5\,\text{ml}$ Desinfektionsmittel mittels einer Sprühflasche aufgetragen. Wie viele Tropfen entstehen dabei, wenn man einen Durchmesser von $1\,\mu\text{m}$ je Tropfen annimmt?

  Lösung

Aufgaben zur Analysis

Eigenschaften von Funktionen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Eigenschaften von Funktionen*.

Stetigkeit

- Untersuche die folgende Funktion auf Stetigkeit an der Stelle $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{für } x \in \,]-\infty; 1] \\ x - 1 & \text{für } x \in [\;\;1;\; \infty[\end{cases}$$

  Lösung

- Ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ global stetig?

  Lösung

Differentialrechnung

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Differentialrechnung*.

- Ist eine an einer Stelle x_0 differenzierbare Funktion an dieser Stelle auch stetig? Ist umgekehrt eine an einer Stelle x_0 stetige Funktion an dieser Stelle auch differenzierbar?

  Lösung

- Wie lautet die Ableitung der folgenden Funktion (mit $c \in \mathbb{R}^{+}$):

$$f(x) = \frac{c \cdot x}{x^2 - c^2}$$

  Lösung

Integralrechnung

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Integralrechnung*.

Integrationsmethoden

- Ein zunächst leeres Waschbecken wird bis zu einem Zeitpunkt von $t_1 = 30\,\mathrm{s}$ mit Wasser gefüllt, wobei der Volumenstrom in diesem Zeitabschnitt konstant $\dot{V} = \frac{\Delta V_1}{\Delta t_1} = 0{,}3\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$ beträgt. Anschließend wird der Wasserzufluss gestoppt.

  Ab dem Zeitpunkt $t_2 = 45\,\mathrm{s}$ wird dann der Ablauf des Waschbeckens geöffnet, wobei das Wasser mit einem konstanten Volumenstrom von $\dot{V} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t_2} = 1{,}2\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$ ausfließt.

  Wieviel Wasser wird zum Zeitpunkt $t_3 = 50\,\mathrm{s}$ noch im Waschbecken enthalten sein?

  Lösung

- Welchen Wert hat das Integral $\int_0^1 x \cdot e^x \cdot \mathrm{d}x$?

  Lösung

Aufgaben zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie

Determinanten

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Determinanten*.

- Wie lässt sich folgende Determinante mittels der *Regel von Sarrus* berechnen?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -5 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

  Lösung

- Wie lassen sich folgende lineare Gleichungssysteme mittels der *Regel von Cramer* berechnen?

  a)
$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &= 8 \\ 3 \cdot x_1 - 9 \cdot x_2 &= -24 \end{aligned}$$

  b)
$$\begin{aligned} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 &= 11 \\ -2 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 1 \\ 3 \cdot x_1 - 9 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= 15 \end{aligned}$$

  Lösung

Aufgaben zur Stochastik

Zufallsexperimente und Ereignisse

- Für ein einmaliges Werfen eines sechskantigen Würfels werden folgende Ereignisse vorgeschlagen:
  - ω_1: "Die gewürfelte Zahl ist eine gerade Zahl."
  - ω_2: "Die gewürfelte Zahl ist eine Primzahl."
  - ω_3: "Die gewürfelte Zahl ist Eins."

  Weshalb ist $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ kein Ereignisraum?

  Lösung

Aufgaben zur Statistik

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Beschreibende Statistik*.

Mittelwerte und Streuungsmaße

- Bei der Statistischen Erhebung "Mikrozensus 2015" hat sich die in der folgenden Tabelle dargestellte Häufigkeitsverteilung für die Anzahl an Kindern in Haushalten und Familien ergeben (Quelle: Destatis). Wie viele Kinder gibt es durchschnittlich je Haushalt?

Kinder je Haushalt	Anzahl an Haushalten	
	Anzahl z in 1000	h in %
0	29 365	$72,02\%$
1	5 977	$14,66\%$
2	4 098	$10,05\%$
3	1 057	$2,56\%$
4	205	$0,50\%$
5 (oder mehr)	72	$0,18\%$
Insgesamt	40 774	100%

Lösung

Lösungen

Lösungen zur Logik

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Logik*.

- Die Gleichung stellt eine Aussageform dar, da in ihr als Charakteristikum (mindestens) eine unbestimmte Variable auftritt.

  Weist man der Variablen den Wert $x = 1$ zu, so geht die Aussageform über in die Aussage $1 - 5 + 6 = 0$, was offensichtlich als Wahrheitswert "falsch" hat. Weist man der Variablen hingegen den Wert $x = 2$ zu, so ergibt sich die wahre Aussage $4 - 10 + 6 = 0$.

  Zurück zur Aufgabe

- Die mathematiche Kurzschreibweise für "10 ist Teiler von x" lautet $10|t$ ("Zehn teilt x"). Da es sich bei der Aussage um eine Folgerung ("Implikation") handelt, kann also geschrieben werden:

  $$10|x \quad \Rightarrow \quad 2|x$$

  Zurück zur Aufgabe

- Die beiden Aussagen lassen sich nur mit einer Implikation sinnvoll verknüpfen. Jedes Quadrat hat vier gleich große Innenwinkel. Umgekehrt ist jedes Viereck mit vier gleich großen Innenwinkel zwar ein Rechteck, aber nicht zwingend ein Quadrat. Zusammengefasst gilt also:

  $$A_1 \quad \Rightarrow \quad A_2$$

  Wird die zweite Aussage um den Zusatz "und es hat gleich lange Seiten" ergänzt, so sind die erste und die zweite Aussage äquivalent zueinander. In diesem Fall kann man also schreiben:

  $$A_1 \quad \Leftrightarrow \quad A_{2,\text{neu}}$$

  Zurück zur Aufgabe

- - Bei einer UND-Verknüpfung müssen beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein, damit ihr Wahrheitswert "wahr" ist (die Aussage also zutrifft). Demnach wäre es bei der Anweisung "Rauchen UND Umgang mit offenen Licht ist verboten!" aus rein logischer Sicht immer noch erlaubt, *entweder* zu rauchen *oder* Umgang mit offenem Licht zu haben; es darf nur nicht beides zugleich eintreten. In der Praxis ist es allerdings wohl auch bei einer derart schlampig formulierten Warnung empfehlenswert, sicherheitshalber beides zu unterlassen...

- Bei dem wohl eher in Kneipen anzutreffenden Wandspruch “drink OR drive” sollte es wohl eher “drink XOR drive” heißen, denn so gilt die ODER-Verknüpfung für die Fälle “not drink and drive” und “drink and not drive”, allerdings auch für “drink and drive”. Insbesondere vor letzterem ist aber dringend abzuraten...

  Während des Studiums hieß es bei uns daher: “Don’t drink and d(e)rive!” ;-)

Zurück zur Aufgabe

- Durch eine Adjunktion der Aussagen $A_1 :\; 1 < 2$ und $A_2 :\; 1 = 2$ entsteht die Aussage $1 \leq 2$. Die Aussage A_1 ist wahr, die Aussage A_2 hingegen ist falsch. Die ODER-Verknüpfung beider Aussagen ist wahr (da zumindest eine der beiden Teilaussagen wahr ist).

Zurück zur Aufgabe

- Durch eine Konjunktion der Aussagen A_1 : 134 ist durch 2 teilbar. und A_2 : 134 ist durch 3 teilbar. entsteht die Aussage 134 ist durch 2 und 3 teilbar.? Die Aussage A_1 ist wahr, die Aussage A_2 hingegen ist falsch. Die UND-Verknüpfung beider Aussagen ist falsch (die nicht beide Aussagen zugleich wahr sind).

Zurück zur Aufgabe

- Die Antivalenz der beiden Aussagen ergibt die Aussage “Der Zug fährt entweder nach Hamburg oder Berlin”. Ob der Wahrheitswert dieser Gesamt-Aussage wahr oder falsch ist, hängt selbstverständlich vom jeweiligen Zug ab. Wir können allerdings o.B.d.A. annehmen, der Zug sei intakt und habe nur genau diese zwei Fahrt-Optionen: Dann trifft stets genau eine der beiden Aussagen zu (niemals keine, niemals beide zugleich).

Zurück zur Aufgabe

- Die Implikation beider Aussagen liefert die Gesamt-Aussage “Wenn die Erde ein Würfel ist, dann ist die Sonne eine Pyramide.” Beide Teil-Aussagen sind falsch, die Implikation hingegen richtig (da eine Folgerung aus einer falschen Aussage definitionsgemäß stets wahr ist).

Zurück zur Aufgabe

- Die Adjunktion (ODER-Verknüpfung) einer wahren und einer falschen Aussage (im Computer-Bereich: “Bedingung”) ist stets wahr; die Gesamt-Aussage ergibt somit den logischen Wert “wahr”.

Zurück zur Aufgabe

Lösungen zur Mengenlehre

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Mengenlehre*.

- Eine Vereinigungsmenge enthält alle Elemente, die zu (mindestens) einer der beiden Teilmengen gehören. Für $\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2$ ergibt sich im gegebenen Fall somit:

  $$\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2 = \{a,\, b,\, c,\, d\} \cup \{b,\, c,\, d,\, e,\, f\} = \{a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f\}$$

  Zurück zur Aufgabe

- Eine Schnittmenge enthält alle Elemente, die gleichzeitig zu beiden Teilmengen gehören. Für $\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2$ ergibt sich in den einzelnen Fäll somit:

  a) $\{1,\, 2,\, 3,\, 4\} \cap \{2,\, 4,\, 6,\, 8,\, 10\} = \{2,\, 4\}$

  b) $\{a,\, b,\, c,\, d\} \cap \{m,\, n,\, o,\, p,\, q\} = \emptyset$

  c) $\{\frac{9}{3},\, 4,\, 5^2\} \cap \{3^3,\, \sqrt{9},\, 7\} = \{3\}$

  d) $\{x \,|\, x < 5\} \cap \{x \,|\, x \ge 3\}$
  $= \{x \,|\, 3 \le x < 5\}$

  Zurück zur Aufgabe

- Als Differenzmenge $\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2$ ergibt sich für diese beiden Mengen:

  $$\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2 = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\} \setminus \{4,\, 5,\, 6,\, 7,\, 8,\, 9,\, 10\} = \{1,\, 2,\, 3\}$$

  $$\mathbb{M}_2 \setminus \mathbb{M}_1 = \{4,\, 5,\, 6,\, 7,\, 8,\, 9,\, 10\} \setminus \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\} = \{7,\, 8,\, 9,\, 10\}$$

  Es ist somit offensichtlich $(\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2) \neq (\mathbb{M}_2 \setminus \mathbb{M}_1)$.

  Zurück zur Aufgabe

Abbildungen und Funktionen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Abbildungen, Funktionen, Relationen und Operationen*.

- Die Abbildung kann als Teil der Produktmenge $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ aufgefasst werden; bezeichnet man diese Teilmenge als F, so gilt:

  $$F = \{(1;\, 6),\, (1;\, 8),\, (3;\, 7),\, (5;\, 9)\}$$

  Die Abbildung ist keine Funktion, da das Element 1 aus der Menge $\mathbb{M}_1$ *nicht eindeutig* auf ein Element der Menge $\mathbb{M}_2$ abgebildet wird.

  Zurück zur Aufgabe

Lösungen zur Arithmetik

Grundrechenarten und Rechenregeln

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Grundrechenarten und Rechenregeln*.

- a) Durch Addition beziehungsweise Subtraktion können nur gleichartige Terme zusammengefasst werden (beispielsweise ergibt $a + a + a = 3 \cdot a$, $a + b + c$ lässt sich hingegen nicht weiter vereinfachen). Im konkreten Fall müssen zunächst die Klammern aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} &3 \cdot a - 2 \cdot b - (6 \cdot a + 3 \cdot b) - (-3 \cdot a - 4 \cdot b) \\ =&3 \cdot a - 2 \cdot b - \;\; 6 \cdot a - 3 \cdot b \quad + \;\; 3 \cdot a + 4 \cdot b \end{aligned}$$

  Hierbei wurde berücksichtigt, dass ein Minus-Zeichen vor einer Klammer das Vorzeichen aller Terme innerhalb der Klammer vertauscht. Nun können die einzelnen Vielfachen von a- beziehungsweise b sortiert und zusammengefasst werden. Man erhält damit

$$\begin{aligned} &3 \cdot a \;-\; 2 \cdot b \;-\; 6 \cdot a \;-\; 3 \cdot b \;+\; 3 \cdot a \;+\; 4 \cdot b \\ =\;&3 \cdot a \;-\; 6 \cdot a \;+\; 3 \cdot a \;-\; 3 \cdot b \;-\; 2 \cdot b \;+\; 4 \cdot b = -b \end{aligned}$$

  Das Sortieren der einzelnen Summanden ist optional und wird meist nicht explizit geschrieben; im obigen Beispiel wurden die Terme nur zwecks der besseren Übersichtlichkeit explizit sortiert.

- b) Um Terme miteinander zu multiplizieren, multipliziert man einerseits die Koeffizienten (mit ihren Vorzeichen) sowie die Variablen miteinander. Im konkreten Fall ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} &5 \cdot a \cdot b \cdot (-2) \cdot b^2 \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot b \cdot c^2 \\ =\;&5 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b \cdot c \cdot c^2 = -5 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 \end{aligned}$$

  Ebenso wie bei der Multiplikation von Zahlen können somit auch Produkte von gleichartigen Variablen zu Potenzen zusammengefasst werden.

  Zurück zur Aufgabe

Bruchrechnung

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Bruchrechnung*.

- Bei der Angabe eines Definitionsbereichs muss sichergestellt werden, dass der Nenner eines Bruchterms nicht Null wird. Konkret muss also gelten:

  a) $\dfrac{5 \cdot a - 3}{4 \cdot a} \quad \Rightarrow \; 4 \cdot a \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \neq 0$

  b) $\dfrac{2 \cdot a + 4 \cdot b}{b - 7} \quad \Rightarrow \; b - 7 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b \neq 7$

  c) $\dfrac{8}{(c+3) \cdot (c-2)} \quad \Rightarrow \; (c+3) \neq 0 \text{ und } (c-2) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c \neq -3 \,\wedge\, c \neq 2$

  d) $\dfrac{2 \cdot c \,+\, 5 \cdot d \,+\, 1}{3 \cdot d^2 + 1} \quad \Rightarrow \; d^2 > -1 \quad \Longleftrightarrow \quad$ keine Einschränkung nötig!

  In Teilaufgabe d) wurde die Tatsache genutzt, dass das Quadrat einer Zahl stets positiv ist.

  Zurück zur Aufgabe

- a) Die beiden Bruchterme haben den gleichen Nenner; folglich lassen sich ihre Zähler unmittelbar zusammenfassen:

$$\frac{8 \cdot a - 3 \cdot b}{a^2 - b^2} - \frac{5 \cdot a - 6 \cdot b}{a^2 - b^2} = \frac{8 \cdot a - 3 \cdot b - (5 \cdot a - 6 \cdot b)}{a^2 - b^2} = \frac{3 \cdot a + 3 \cdot b}{a^2 - b^2}$$

  Im Zähler kann nun 3 als gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden; der Nenner kann als binomische Formel geschrieben werden. Damit ergibt sich:

$$\frac{3 \cdot a + 3 \cdot b}{a^2 - b^2} = \frac{3 \cdot (a+b)}{(a+b) \cdot (a-b)} = \frac{3}{a-b}$$

  Im letzten Rechenschritt wurde der gemeinsame Faktor $(a+b)$ gekürzt.

- b) Bei dem Produkt der beiden Bruchterme kann der Faktor $(c-d)$ gekürzt werden; ebenso kann der verbleibende Zählerterm $(c+d)$ gegen das Quadrat dieses Terms im Nenner gekürzt werden. Damit ergibt sich:

$$\frac{c+d}{c-d} \cdot \frac{(c-d)}{(c+d)^2} = \frac{(c+d) \cdot \cancel{(c-d)}}{\cancel{(c-d)} \cdot (c+d)^2} = \frac{c+d}{(c+d)^2} = \frac{1}{c+d}$$

- c) Dividieren heißt mit dem Kehrbruch multiplizieren. Damit ergibt sich:

$$\frac{8 \cdot e^2 \cdot f}{3 \cdot g \cdot h} : \frac{4 \cdot e \cdot f}{6 \cdot g^2 \cdot h^2} = \frac{8 \cdot e^2 \cdot f}{3 \cdot g \cdot h} \cdot \frac{6 \cdot g^2 \cdot h^2}{4 \cdot e \cdot f}$$

  Dieses Produkt enthält sowohl im Zähler wie auch im Nenner ausschließlich Produkte; die einzelnen Faktoren können somit folgendermaßen gekürzt werden:

$$\frac{8 \cdot e^2 \cdot f \cdot 6 \cdot g^2 \cdot h^2}{3 \cdot g \cdot h \cdot 4 \cdot e \cdot f} = \frac{2 \cdot 2 \cdot e^2 \cdot g^2 \cdot h^2}{e \cdot g \cdot h} = 4 \cdot e \cdot g \cdot h$$

  Zurück zur Aufgabe

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Potenzen, Wurzeln und Logarithmen*.

- a) Die Wurzel kann folgendermaßen umgestellt werden:

$$\sqrt[2]{16}^3 = 16^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{16})^3 = 4^3 = 64$$

- b) Beim Quadrieren eines Produkts werden alle Faktoren einzeln quadriert, es gilt also $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$. Man erhält damit:

$$(5 \cdot \sqrt{2})^2 = 5^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 25 \cdot 2 = 50$$

- c) In der Darstellung als allgemeine Potenz ergibt sich für die Wurzel:

$$(\sqrt[2]{7})^4 = 7^{\frac{4}{2}} = 7^2 = 49$$

- c) Auch in diesem Fall ist eine Darstellung der Wurzel als allgemeine Potenz hilfreich. Mit dem Zusammenhang $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ ergibt sich:

$$\sqrt[4]{a^8 \cdot b^4}^3 = (a^8 \cdot b^4)^{\frac{3}{4}} = a^{8 \cdot \frac{3}{4}} \cdot b^{4 \cdot \frac{3}{4}} = a^6 \cdot b^3$$

- e) Der Term lässt sich vereinfachen, indem man die einzelnen Wurzeln schrittweise "zusammenzieht":

$$\sqrt[3]{7 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt[3]{7}}} = \sqrt[3]{7 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{7^3 \cdot 7}}} = \sqrt[3]{7 \cdot \sqrt[6]{7^4}} = \sqrt[3]{7 \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{7^3 \cdot 7^2}} = \sqrt[9]{7^5}$$

Im ersten Schritt wurde für der Faktor 7 durch den gleichwertigen Ausdruck $\sqrt[3]{7^3}$ ersetzt und damit das Produkt der Wurzeln $\sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{7}$ zu einer Wurzel $\sqrt[3]{7^3 \cdot 7}$ zusammengefasst. Dadurch konnte die Quadrat- und die innere Kubikwurzel als eine einzige Wurzel geschrieben werden. Ein ähnliches Vorgehen wurde dann nochmals angewendet.

Eine alternative, vielleicht übersichtlichere Schreibweise erhält man, wenn man die einzelnen Wurzeln als allgemeine Potenzen darstellt:

$$\sqrt[3]{7 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt[3]{7}}} = \left(7 \cdot \left(7 \cdot 7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(7 \cdot \left(7^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(7 \cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(7^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{5}{9}}$$

- f) Zunächst kann man das Minus im Exponenten beseitigen, indem man Zähler und Nenner vertauscht:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[2]{6}}\right)^{-6} = \left(\frac{\sqrt[2]{6}}{\sqrt[3]{3}}\right)^{6}$$

Für eine weitere Vereinfachung ist es empfehlenswert, die Wurzeln als allgemeine Potenzen darzustellen und den Zusammenhang $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ zu nutzen:

$$\left(\frac{\sqrt[2]{6}}{\sqrt[3]{3}} \right)^6 = \left(\frac{6^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} \right)^6 = \frac{6^{\frac{1}{2} \cdot 6}}{3^{\frac{1}{3} \cdot 6}} = \frac{6^3}{3^2} = 24$$

Zurück zur Aufgabe

Lösungen zur elementaren Algebra

Gleichungen

Lineare Gleichungen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Lineare Gleichungen*.

- Zur Lösung der Gleichung empfiehlt es sich, beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner $2 \cdot 3 = 6$ der auftretenden Terme zu multiplizieren.

$$\begin{aligned} \frac{10 \cdot x + 3}{3} - 5 &= 11 - \frac{3 \cdot x + 4}{2} - \frac{2 \cdot x + 6}{3} \\ 6 \cdot \left(\frac{10 \cdot x + 3}{3} - 5 \right) &= 6 \cdot \left(11 - \frac{3 \cdot x + 4}{2} - \frac{2 \cdot x + 6}{3} \right) \end{aligned}$$

Multipliziert man die Klammern aus, so können die auftretenden Brüche durch Kürzen beseitigt werden. Man erhält dadurch:

$$2 \cdot (10 \cdot x + 3) \; - \; 30 = 66 - 3 \cdot (3 \cdot x + 4) - 2 \cdot (2 \cdot x + 6)$$

Die Gleichung kann durch ein Ausmultiplizieren der Klammern weiter vereinfacht werden:

$$20 \cdot x + 6 \; - \; 30 = 66 - 9 \cdot x - 12 - 4 \cdot x - 12$$

Zum Auflösen werden alle x-Terme auf eine Seite der Gleichung, alle anderen Terme auf die andere Seite der Gleichung gebracht. Damit folgt:

$$\begin{aligned} 20 \cdot x + 13 \cdot x &= 66 - 24 + 24 \\ 33 \cdot x &= 66 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichung lautet somit $x = 2$.

Zurück zur Aufgabe

Quadratische Gleichungen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Quadratische Gleichungen*.

- a) Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen ("Mitternachtsformel") liefert für die gegebene Gleichung $x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$ mit $a = 1$, $b = -6$ und $c = 8$:

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

  Somit ergeben sich folgende Lösungen:

  $$x_1 = \frac{6-2}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{6+2}{2} = 4$$

  Die Lösungsmenge der Gleichung lautet somit $\mathbb{L} = \{2;\, 4\}$.

- b) Zum Lösen der Gleichung $3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 15 = 0$ sind in die "Mitternachtsformel" die Werte $a = 3$, $b = 4$ und $c = -15$ einzusetzen. Man erhält damit:

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{6}$$

  Die Wurzel $\sqrt{196}$ ergibt den Wert 14. Als Lösungen erhält man damit:

  $$x_1 = \frac{-4-14}{6} = -3 \qquad x_2 = \frac{-4+14}{6} = \frac{5}{3}$$

  Die Lösungsmenge der Gleichung lautet somit $\mathbb{L} = \left\{-3;\, \frac{5}{3}\right\}$.

  Zurück zur Aufgabe

- Der Satz von Vieta ist insbesondere dann nützlich, wenn eine quadratische Gleichung der Form $1 \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ vorliegt und b sowie c ganze Zahlen sind.

  Man prüft dann als erstes, durch welche Produkt zweier Zahlen sich die Zahl c darstellen lässt. Im Fall $c = 20$ ergeben sich folgende Möglichkeiten:

  $$\begin{aligned} 20 &= 20 \cdot 1 \\ &= 10 \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 4 \end{aligned}$$

  Ebenfalls möglich sind die Produkte $(-20) \cdot (-1)$, $(-10) \cdot (-2)$ und $(-5) \cdot (-4)$. Eine dieser drei beziehungsweise sechs Möglichkeiten gibt die beiden Lösungen der Gleichung an.

  Um zu prüfen, welche der obigen Möglichkeiten die Gleichung löst, bildet man die Summen der einzelnen Wertepaare:

  $$\begin{aligned} 20 + 1 &= 21 \\ 10 + 2 &= 12 \\ 5 + 4 &= 9 \end{aligned}$$

Das “richtige” Wertepaar erkennt man daran, dass die Summe einen Wert ergibt, der mit dem Wert von $(-b)$ identisch ist. In dieser Aufgabe ist $b = -9$, also ist $(-b) = 9$. Die Lösung der Gleichung lautet somit:

$$x_1 = 4 \quad ; \quad x_2 = 5$$

Als Produktform lässt sich die Gleichung damit wie folgt schreiben:

$$x^2 - 9 \cdot x + 20 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-4) \cdot (x-5) = 0$$

Zurück zur Aufgabe

Algebraische Gleichungen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Algebraische Gleichungen höheren Grades*.

- Existiert die Lösung $x_1 = 3$, so kann der Gleichungsterm in ein Produkt aus dem Linearfaktor $(x-3)$ und einem Restterm zerlegt werden. Dieser kann mittels einer Polynom-Division ermittelt werden; es muss also folgende Rechnung durchgeführt werden:

$$(x^3 - 6 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 30) : (x - 3) = \,?$$

Als erstes prüft man, mit welchem Faktor x zu multiplizieren ist, um x^3 zu erhalten; als Ergebnis kann man x^2 auf die rechte Seite schreiben. Das Produkt aus $x^2 \cdot (x-3)$ muss dann vom ursprünglichen Term abgezogen werden. Man erhält:

$$\begin{array}{rrrl}
(x^3 & -6 \cdot x^2 & -1 \cdot x & +30) : (x-3) = x^2 + \,? \\
-(x^3 & -3 \cdot x^2) & & \\
\hline
 & -3 \cdot x^2 & -1 \cdot x & +30
\end{array}$$

Als nächstes ist also zu prüfen, mit welchem Faktor x zu multiplizieren ist, um $-3 \cdot x^2$ zu erhalten; als Ergebnis kann man wiederum $-3 \cdot x$ auf die rechte Seite schreiben. Das Produkt aus $-3 \cdot x \cdot (x-3)$ muss vom verbleibenden Term abgezogen werden. Man erhält:

$$\begin{array}{rrrl}
(x^3 & -6 \cdot x^2 & -1 \cdot x & +30) : (x-3) = x^2 - 3 \cdot x + \,? \\
-(x^3 & -3 \cdot x^2) & & \\
\hline
 & -3 \cdot x^2 & -1 \cdot x & +30 \\
-(& -3 \cdot x^2 & +9 \cdot x) & \\
\hline
 & & -10 \cdot x & +30
\end{array}$$

Um den verbleibenden Term zu erhalten, muss $(x-3)$ mit dem Faktor (-10) multipliziert werden. Man erhält also:

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & -6\cdot x^2 & -1\cdot x & +30) & :(x-3) = x^2 - 3\cdot x - 10 \\
-(x^3 & -3\cdot x^2) & & & \\
\hline
 & -3\cdot x^2 & -1\cdot x & +30 & \\
-(& -3\cdot x^2 & +9\cdot x) & & \\
\hline
 & & -10\cdot x & +30 & \\
 & -(& -10\cdot x & +30) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Der bei der Polynomdivision verbleibende Rest-Term ist also $x^2-3\cdot x-10$. Setzt man diesen Term gleich Null, so kann man die verbleibenden Lösungen der ursprünglichen Gleichung berechnen:

$$x^2 - 3\cdot x - 10 = 0$$

Diese quadratische Gleichung kann wahlweise mittels der Mitternachtsformel oder (in diesem Fall wohl einfacher) mittels des Satzes von Vieta gelöst werden. Man erhält:

$$x_2 = -2 \qquad x_3 = 5$$

Die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung lautet somit $\mathbb{L} = \{-2;\, 3;\, 5\}$.

Zurück zur Aufgabe

- a) Die Gleichung $2\cdot x^3 - 5\cdot x^2 - 12\cdot x = 0$ enthält auf der linken Gleichungs-Seite keinen Zahlenterm; es kann somit x ausgeklammert werden:

$$2\cdot x^3 - 5\cdot x^2 - 12\cdot x = 0$$
$$\Rightarrow x\cdot(2\cdot x^2 - 5\cdot x - 12) = 0$$

Man erhält damit unmittelbar $x_1 = 0$ als erste Lösung der Gleichung. Die übrigen Lösungen erhält man, wenn man den Restterm gleich Null setzt (denn ein Produkt ist stets dann Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist):

$$2\cdot x^2 - 5\cdot x - 12 = 0$$

Mittels der "Mitternachtsformel" erhält man mit $a=2$, $b=-5$ und $c=-12$:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} = \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 2\cdot(-12)}}{4} = \frac{+5\pm\sqrt{121}}{4}$$

Die Wurzel $\sqrt{121}$ ergibt den Wert 11. Als Lösungen erhält man damit:

$$x_2 = \frac{+5-11}{4} = -\frac{3}{2} \qquad x_3 = \frac{+5+11}{4} = 4$$

Die Lösungsmenge der Gleichung lautet also $\mathbb{L} = \{-\frac{3}{2};\, 0;\, 4\}$.

- b) Die Gleichung $x^4 - 13 \cdot x^2 + 36 = 0$ enthält auf der linken Seite nur x-Terme mit geraden Exponenten; man kann daher x^2 durch eine neue Variable z ersetzen ("Substitution"). Für diese neue Variable ergibt sich folgende Gleichung:

  $$z^2 - 13 \cdot z + 36 = 0$$

  Diese quadratische Gleichung kann wahlweise mittels der Mitternachtsformel oder (in diesem Fall wohl einfacher) mittels des Satzes von Vieta gelöst werden. Man erhält:

  $$z_1 = 4 \qquad z_2 = 9$$

  Die ursprüngliche Gleichung hat höchstens vier Lösungen, da der größte auftretende Exponent gleich vier ist. Diese Lösungen ergeben sich mit den obigen Lösungen für z folgendermaßen:

  $$\begin{aligned} x_{1,2}^2 = 4 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{4} \\ x_{3,4}^2 = 9 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{9} \end{aligned}$$

  Man erhält damit als Lösungen $x_1 = -2$, $x_2 = +2$, $x_3 = -3$ und $x_4 = +3$. Durch Einsetzen dieser Werte in die ursprüngliche Gleichung kann/muss geprüft werden, ob es sich tatsächlich um Lösungen der ursprünglichen Gleichung handelt, da durch das Quadrieren beziehungsweise Wurzelziehen (keine Äquivalenzumformung!) "Scheinlösungen" entstehen können.

  Da die obigen Werte tatsächlich die Gleichung erfüllen, ergibt sich als Lösungsmenge der Gleichung $\mathbb{L} = \{-3;\, -2;\, 2;\, 3\}$.

  Zurück zur Aufgabe

Bruch-, Produkt- und Wurzelgleichungen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Bruch-, Produkt- und Wurzelgleichungen*.

Bruch- und Produktgleichungen

- Bei der Gleichung handelt es sich um eine Produkt-Gleichung; für den Definitionsbereich gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, es dürfen also alle reellen Zahlen für x eingesetzt werden.

  Um die Gleichung zu lösen, ist es hilfreich, alle die Variable x beinhaltende Terme auf die linke Seite zu sortieren. Dadurch erhält man:

  $$\begin{aligned} 3 \cdot x \cdot (x-5) &= 6 \cdot (x-5) \\ 3 \cdot x \cdot (x-5) - 6 \cdot (x-5) &= 0 \end{aligned}$$

Auf der linken Seite kann nun der Term $(x-5)$ ausgeklammert werden. Daraus ergibt sich:

$$(3\cdot x-6)\cdot(x-5)=0$$

Ein Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Die Gleichung ist somit in den folgenden beiden Fällen erfüllt:

$$\begin{aligned}3\cdot x-6=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x=2\\ x-5=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x=5\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist somit $\mathbb{L}=\{2;\,5\}$.

Hinweis: Würde man im ersten Schritt durch $(x-5)$ dividieren, so bliebe nur noch die Lösung $x=2$ übrig. Bei einer Division einer Gleichung durch einen Term muss also stets darauf geachtet werden, dass dieser Term ungleich Null ist; gegebenenfalls muss eine Fallunterscheidung vorgenommen und dieser Fall – im obigen Beispiel $x=5$ – separat untersucht werden.

Zurück zur Aufgabe

- Bei Bruchgleichungen muss ausgeschlossen sein, dass die Nenner der auftretenden Terme gleich Null werden; es muss also gelten:

$$\begin{aligned}2\cdot x+10\neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x\neq -5 \text{ und}\\ 4-2\cdot x\neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x\neq 2\end{aligned}$$

Um die Gleichung zu lösen, ist es empfehlenswert, beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner $(2\cdot x+10)\cdot(4-2\cdot x)$ zu multiplizieren. Nach dem Kürzen entfallen dadurch die Nenner:

$$\frac{3\cdot x+13}{2\cdot x+10}=\frac{4-3\cdot x}{4-2\cdot x}$$

$$\frac{\cancel{(2\cdot x+10)}\cdot(4-2\cdot x)\cdot(3\cdot x+13)}{\cancel{2\cdot x+10}}=\frac{(4-3\cdot x)\cdot(2\cdot x+10)\cdot\cancel{(4-2\cdot x)}}{\cancel{4-2\cdot x}}$$

$$\Rightarrow (4-2\cdot x)\cdot(3\cdot x+13)=(4-3\cdot x)\cdot(2\cdot x+10)$$

Um diese Gleichung weiter zu vereinfachen, müssen die Terme auf beiden Seiten ausmultipliziert werden, denn ansonsten wäre ein Sortieren der Gleichung in Variablen-Terme und reine Zahlen-Terme nicht möglich. Man erhält:

$$\begin{aligned}12\cdot x+52-6\cdot x^2-26\cdot x&=8\cdot x+40-6\cdot x^2-30\cdot x\\ -6\cdot x^2-14\cdot x+52&=-6\cdot x^2-22\cdot x+40\end{aligned}$$

Sortiert man nun alle x-Terme auf die linke und alle übrigen Terme auf die rechte Seite, so entfällt der quadratische Term. Übrig bleibt eine lineare Gleichung mit folgender Lösung:

$$\begin{aligned}8\cdot x\ &=-12\\ x\ &=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist somit $\mathbb{L}=\{-\frac{3}{2}\}$.

Zurück zur Aufgabe

- Betrachtet man (ohne jegliche algebraische Umformung) den Definitionsbereich der Gleichung, so stellt man fest, dass dieser der leeren Menge $\emptyset$ entspricht: Es gibt nämlich keinen Wert für die Variable x, so dass die beiden Bedingungen $x - 5 \geq 0$ und $2 - x \geq 0$ gleichzeitig erfüllt sind. Da dies nicht möglich ist, kann die Gleichung folglich für keine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ erfüllt werden.

  Zurück zur Aufgabe

- a) Die Definitionsmenge ergibt sich, da reellwertige Wurzeln nicht negativ sein dürfen, aus folgenden Ungleichungen:

  $$\begin{aligned} \sqrt{x+1} \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \geq -1 \\ x - 5 \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \geq 5 \end{aligned}$$

  Da beide Bedingungen zugleich gelten müssen und die zweite Bedingung $x \geq 5$ die erste Bedingung $x \geq -1$ hinreichend mit einschließt, gilt für den Definitionsbereich der Gleichung $\mathbb{D} = [5; \infty[$.

  Um die Gleichung zu lösen, können die Terme auf beiden Seiten in einem ersten Rechenschritt quadriert werden. Man erhält hierbei:

  $$x + 1 = (x-5)^2$$

  Diese Gleichung entspricht nun einer quadratischen Gleichung. Um sie zu lösen, werden alle Terme auf die linke Seite sortiert und anschließend Klammer der quadratische Term $(x-5)^2$ ausgewertet:

  $$\begin{aligned} (x-5)^2 \quad - x - 1 &= 0 \\ (x^2 - 10 \cdot x + 25) - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

  Da in der resultierenden Gleichung alle Operatoren die gleiche Priorität haben und vor der Klammer kein Minuszeichen steht, können die Klammern weggelassen werden. Die x-Terme sowie die Zahlenwerte können noch folgendermaßen zusammengefasst werden:

  $$x^2 - 11 \cdot x + 24 \quad = 0$$

  Diese Gleichung kann beispielsweise mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gelöst werden. Mit $a = 1$, $b = -11$ und $c = 24$ erhält man:

  $$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{11 - \sqrt{121 - 4 \cdot 24}}{2 \cdot 1} = \frac{11 - \sqrt{25}}{2} = 3 \\ x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{11 + \sqrt{121 - 4 \cdot 24}}{2 \cdot 1} = \frac{11 + \sqrt{25}}{2} = 8 \end{aligned}$$

Man könnte nun annehmen, dass die Lösungsmenge gleich $\mathbb{L} = \{3;\, 8\}$ ist – doch das ist falsch! Die Definitionsmenge $\mathbb{D} = [5;\, \infty[$ der ursprünglichen Gleichung schließt die Lösung $x_1 = 3$ der späteren quadratischen Gleichung aus. Der Grund für das Hinzukommen der "Scheinlösung" liegt im ersten Rechenschritt, nämlich dem Quadrieren beider Seiten der Gleichung. Da diese Umformung keine Äquivalenz-Umformung ist, können – wie in diesem Beispiel – weitere Lösungen hinzukommen.

Neben einem Blick auf den Definitionsbereich schließt auch ein Einsetzen der erhaltenen Lösungen in die ursprüngliche Gleichung die Scheinlösung $x_1 = 3$ aus. Die Lösungsmenge lautet also $\mathbb{L} = \{8\}$.

- b) Der Definitionsbereich dieser Gleichung muss folgende beide Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x + 7 \ge 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \ge -2\tfrac{1}{3} \\ 2 - 2 \cdot x \ge 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \le 1 \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ der Gleichung entspricht somit dem Intervall $[-2\frac{1}{3};\; 1]$. Durch ein Quadrieren der Gleichung ergibt sich:

$$\left(\sqrt{3 \cdot x + 7}\right)^2 = (2 - 2 \cdot x)^2$$

$$3 \cdot x + 7 = 4 - 8 \cdot x + 4 \cdot x^2$$

Durch das Quadrieren wird die Wurzelgleichung somit zu einer quadratischen Gleichung. Durch ein Sortieren der einzelnen Terme auf die linke Gleichungsseite kann diese auf Normalform gebracht werden:

$$4 \cdot x^2 - 11 \cdot x - 3 = 0$$

Mittels der "Mitternachtsformel" kann diese Gleichung gelöst werden, wenn man für $a = 4$, $b = -11$ und $c = -3$ setzt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{+11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{8} = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{8}$$

Die Wurzel $\sqrt{169}$ ergibt den Wert 13. Als Lösungen erhält man damit:

$$x_1 = \frac{11 - 13}{8} = -\frac{1}{4} \qquad x_2 = \frac{11 + 13}{8} = 3$$

Nur die Lösung x_1 ist im Definitionsbereich $\mathbb{D}$ der Gleichung enthalten, x_2 hingegen stellt eine durch das Quadrieren der Gleichung entstandene Scheinlösung dar. Die Lösungsmenge der Gleichung lautet somit $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{4}\}$.

Zurück zur Aufgabe

Exponential- und Logarithmusgleichungen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Exponential- und Logarithmusgleichungen*.

- a) Die Gleichung kann gelöst werden, indem beide Seiten logarithmiert werden:

  $$3^x = 12$$
  $$\Rightarrow \; \log\left(3^x\right) = \log\left(12\right)$$

  Die Wahl des 10-er-Logarithmus war/ist hierbei willkürlich. Nun kann allerdings die Rechenregel $\log_a\left(b^c\right) = c \cdot \log_a b$ genutzt werden (siehe *Rechenregeln für Logarithmen*), so dass sich folgende Gleichung ergibt:

  $$x \cdot \log\left(3\right) = \log 12$$
  $$\Rightarrow \; x = \frac{\log\left(12\right)}{\log\left(3\right)} \approx 2,262$$

  Die Gleichung gilt also für $x \approx 2,262$.

- b) Die Gleichung kann gelöst werden, indem beide Seiten auf die gleiche Basis gebracht werden. Auf der rechten Seite der Gleichung nämlich $4 = 2^2$ gesetzt werden:

  $$2^{2 \cdot x + 2} = 4^{3 \cdot x - 15}$$
  $$2^{2 \cdot x + 2} = \left(2^2\right)^{3 \cdot x - 15}$$

  Diese Umformung hat den Vorteil, dass nun die Rechenregel $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$ angewendet werden kann:

  $$2^{2 \cdot x + 2} = 2^{2 \cdot (3 \cdot x - 15)}$$
  $$2^{2 \cdot x + 2} = 2^{6 \cdot x - 30}$$

  Sind die Basen auf beiden Seiten der Gleichung identisch, so müssen auch die Exponenten gleich sein. Es muss also gelten:

  $$2 \cdot x + 2 = 6 \cdot x - 30$$
  $$4 \cdot x = 32$$
  $$x = 8$$

  Die Gleichung hat somit die Lösung $x = 8$.

  Zurück zur Aufgabe

- a) Die Definitionsmenge der Gleichung ist $\mathbb{D} = \{x \,|\, x > 0, \; x \neq 1\}$.

  Gemäß der Definition eines Logarithmus kann die Gleichung auch wie folgt geschrieben werden:

  $$\log_x\left(125\right) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 = 125$$

Zieht man bei der Gleichung auf der rechten Seite die dritte Wurzel, so erhält man:

$$x = \sqrt[3]{125} = \pm 5$$

Unter Berücksichtigung der Definitionsmenge lautet die Lösung somit $\mathbb{L} = \{5\}$.

- b) Um die Gleichung zu lösen, werden zunächst beide Seiten der Gleichung als Exponenten zur Basis 5 geschrieben. Auf der linken Seite entfällt dabei wegen $5^{\log_5 x} = x$ der Logarithmus:

$$\begin{aligned} \log_5 (3 \cdot x - 2) &= 4 \\ \Rightarrow\; 3 \cdot x - 2 &= 5^4 \\ 3 \cdot x - 2 &= 625 \\ 3 \cdot x &= 627 \\ x &= 209 \end{aligned}$$

  Die Gleichung hat somit die Lösung $x = 209$.

  Zurück zur Aufgabe

Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Quadratische Ungleichungen*.

- Mittels des Satzes von Vieta kann man schnell ermitteln, dass die Gleichung $x^2 + 9 \cdot x + 14 = 0$ die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 7$ besitzt; man kann die Ungleichung also auch folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} x^2 + 9 \cdot x + 14 &< 0 \\ \Longleftrightarrow (x - 2) \cdot (x - 7) &< 0 \end{aligned}$$

  Die Ungleichung ist dann erfüllt, wenn einer der beiden Faktoren auf der linken Seite größer Null und der andere kleiner Null ist. Mit dieser Fallunterscheidung ergibt sich:

  - Für $(x - 2) > 0$ und $(x - 7) < 0$:

$$\begin{aligned} x - 2 > 0 \quad &\text{und} \quad x - 7 < 0 \\ x > 2 \quad &\text{und} \quad x < 7 \end{aligned}$$

    Die Lösungsmenge für diesen Fall ist somit $\mathbb{L}_1 =]2;\ 7[$.

- Für $(x-2) < 0$ und $(x-7) > 0$:

$$\begin{aligned} x - 2 < 0 \quad &\text{und} \quad x - 7 > 0 \\ x < 2 \quad &\text{und} \quad x > 7 \end{aligned}$$

  Die Lösungsmenge für diesen Fall ist die leere Menge, also $\mathbb{L}_2 = \emptyset$.

Die Gesamt-Lösungsmenge ist gleich der Vereinigungsmenge beider Fälle; es ist somit $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]2;\; 7[$.

Zurück zur Aufgabe

Betragsungleichungen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Betragsungleichungen*.

- Der Term $|x-1|$ ist, sofern $x \geq 1$ ist, identisch mit $x-1$, andernfalls identisch mit $-(x-1)$. Mit dieser Fallunterscheidung ergibt sich:
  - Für $x \geq 1$:

    $$x - 1 < 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 5$$

    Die Lösungsmenge für diesen Fall ist somit $\mathbb{L}_1 = \;[1;\; 5[$.
  - Für $x < 1$:

    $$-(x-1) < 4 \quad \Longleftrightarrow \quad -x < 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x > -3$$

    Die Lösungsmenge für diesen Fall ist somit $\mathbb{L}_2 =]-3;\; 1[$.

  Die Gesamt-Lösungsmenge ist gleich der Vereinigungsmenge beider Fälle; es ist somit $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-3;\; 5[$.

  Zurück zur Aufgabe

Lineare Gleichungssysteme

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Lineare Gleichungssysteme*.

- Multipliziert man die zweite Gleichung (II) mit dem Faktor 2, so nehmen die Koeffizienten in der x_1-Spalte die gleichen Werte an:

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}):\quad 4\cdot x_1+2\cdot x_2 &= -6\\ (\mathrm{II}):\quad 2\cdot x_1-3\cdot x_2 &= -7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (\mathrm{I}):\quad 4\cdot x_1+2\cdot x_2 &= -6\\ (2\cdot\mathrm{II}):\quad 4\cdot x_1-6\cdot x_2 &= -14\end{aligned}$$

Subtrahiert man nun beide Gleichungen voneinander, so bleibt die erste Zeile unverändert, während die zweite Zeile durch die Differenz aus der ersten und zweiten Gleichung ersetzt wird.

$$\begin{aligned}\Rightarrow (\mathrm{I}):\quad 4\cdot x_1+2\cdot x_2 &= -6\\ (\mathrm{I}-\mathrm{II}):\quad 0+8\cdot x_2 &= +8\end{aligned}$$

Die zweite Zeile stellt nun eine Gleichung mit nur *einer* Unbekannten dar; beim Auflösen dieser Gleichung erhält man das Ergebnis $x_2 = 1$. Setzt man diesen Wert für x_2 in die Gleichung I ein, so erhält man für die andere Unbekannte:

$$4\cdot x_1+2\cdot 2=-6 \quad\Longleftrightarrow\quad 4\cdot x_1=-8 \quad\Longleftrightarrow\quad x_1=-2$$

Das Gleichungssystem hat somit die Lösung $\mathbb{L} = \{(-2;\ 1)\}$.

Zurück zur Aufgabe

- Bezeichnet man die Anzahl an Sätzen, die der erste Spieler gewonnen hat, mit x_1 und entsprechend die Anzahl der vom anderen Spieler gewonnenen Sätze mit x_2, so entspricht das Rätsel folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x_1+1 &= 2\cdot(x_2-1)\\ x_1-1 &= x_2+1\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann beispielsweise dadurch gelöst werden, indem man die zweite Gleichung nach x_1 auflöst; man erhält dadurch $x_1 = x_2+2$. Setzt man diesen Ausdruck für x_2 in die erste Gleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}(x_2+2)+1 &= 2\cdot(x_2-1)\\ x_2+3 &= 2\cdot x_2-2)\\ x_2 &= 5\end{aligned}$$

Der zweite Spieler hat somit insgesamt 5 Sätze gewonnen, der erste wegen der Beziehung $x_1 = x_2+2$ insgesamt 7 Sätze.

Zurück zur Aufgabe

- a) Ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten hat genau dann eine Lösung, wenn es bei Betrachtung von nur zwei der drei Gleichungen eine Lösung hat und diese auch für die dritte Gleichung gilt.

$$\begin{aligned} \text{(I)}: \qquad 2\cdot x_1 + 8\cdot x_2 &= 4 \\ \text{(II)}: \qquad -5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 &= 20 \\ \text{(III)}: \qquad 7\cdot x_1 + 4\cdot x_2 &= -16 \end{aligned}$$

Es genügt also, zunächst beispielsweise folgendes Gleichungsystem zu betrachten:

$$\begin{aligned} \text{(I)}: \qquad 2\cdot x_1 + 8\cdot x_2 &= 4 \\ \text{(II)}: \qquad -5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 &= 20 \end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit dem Faktor 2, so kann man diese von der ersten Gleichung subtrahieren, um das Gleichungssystem auf eine Gleichung mit nur noch einer Unbekannten zu reduzieren:

$$\begin{aligned} \text{(I)}: \qquad 2\cdot x_1 + 8\cdot x_2 &= 4 \\ (2\cdot\text{II}): \qquad -10\cdot x_1 + 8\cdot x_2 &= 40 \\[1em] (\text{I} - 2\cdot\text{II}): \qquad 12\cdot x_1 \qquad\qquad &= -36 \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert $x_1 = -3$ als Ergebnis. Setzt man diesen Wert für x_1 in die erste Gleichung ein, so erhält man für x_2:

$$\begin{aligned} 2\cdot(-3) + 8\cdot x_2 &= 4 \\ 8\cdot x_2 &= 10 \\ x_2 &= 1{,}25 \end{aligned}$$

Nun ist zu prüfen, ob auch die dritte Gleichung durch die Variablen-Werte $x_1 = -3$ und $x_2 = 1{,}25$ erfüllt wird:

$$\begin{aligned} 7\cdot(-3) + 4\cdot(1{,}25) &= -16 \\ -21 + 5 &= -16 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die gefundene Lösung erfüllt auch die dritte Gleichung. Das Gleichungssystem hat somit eine eindeutige Lösung, und zwar $\mathbb{L} = \{(-3;\ 1{,}25)\}$.

- b) Wiederum betrachtet man zunächst nur zwei der drei Gleichungen. Multipliziert man beispielsweise die dritte Gleichung mit 4 und addiert sie zur zweiten, so erhält man eine neue Gleichung, die nur die Variable x_1 als Unbekannte hat:

$$\begin{aligned} \text{(II)}: \qquad 5\cdot x_1 - 4\cdot x_2 &= -2 \\ (4\cdot\text{III}): \qquad -8\cdot x_1 + 4\cdot x_2 &= -16 \\[1em] (\text{II} + 4\cdot\text{III}): \qquad -3\cdot x_1 \qquad\qquad &= -18 \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt $x_1 = 6$. Setzt man diesen Wert für x_1 in Gleichung (II) ein, so erhält man für x_2:

$$\begin{aligned} 5\cdot 6 - 4\cdot x_2 &= -2 \\ -4\cdot x_2 &= -32 \\ \Rightarrow\ x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Nun ist zu prüfen, ob auch Gleichung (I) durch die Variablen-Werte $x_1 = 6$ und $x_2 = 8$ erfüllt wird:

$$\begin{aligned} -3 \cdot 6 + 7 \cdot 8 &= 15 \\ -18 + 56 &= 15 \\ 38 &= 15 \quad \lightning \end{aligned}$$

Die gefundene Lösung erfüllt zwar die zweite und dritte, nicht jedoch die erste Gleichung. Das Gleichungssytem ist somit nicht lösbar, die Lösungsmenge ist also die leer: $\mathbb{L} = \{\}$.

Zurück zur Aufgabe

- Bei einem Gleichungssystem mit drei Unbekannten und nur zwei Gleichungen stellt die dritte Variable einen frei wählbaren Parameter dar; das Gleichungssystem kann folglich nur in Abhängigkeit dieser Variablen gelöst werden.

  Im konkreten Fall soll das Gleichungssystem in Abhängigkeit von der Variablen x_3 gelöst werden. Hierzu sortiert man diese als erstes auf die rechte Seite des Gleichungssystems (so, als ob es sich dabei um einen gewöhnlichen Zahlenwert handeln würde). Man erhält:

$$\begin{aligned} (\text{I}): &\quad 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = -6 - 2 \cdot x_3 \\ (\text{II}): &\quad -1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 4 + 1 \cdot x_3 \end{aligned}$$

  Dieses Gleichungssystem kann man beispielsweise lösen, indem man die zweite Gleichung von der ersten subtrahiert. Man erhält dann als Gleichung für x_1:

$$\begin{aligned} (\text{I} - \text{II}): &\quad 2 \cdot x_1 &&= -10 - 3 \cdot x_3 \\ \Rightarrow &\quad x_1 &&= -\ 5 - 1,5 \cdot x_3 \end{aligned}$$

  Somit ist x_1 in Abhängigkeit von x_3 bestimmt. Setzt man diesen Ausdruck für x_1 in die zweite Gleichung ein, so erhält man für x_2:

$$\begin{aligned} -1 \cdot (-5 - 1,5 \cdot x_3) + 2 \cdot x_2 &= 4 + 1 \cdot x_3 \\ +5 + 1,5 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2 &= 4 + 1 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_2 &= -1 - 0,5 \cdot x_3 \\ x_2 &= -0,5 - 0,25 \cdot x_3 \end{aligned}$$

  Die Lösungsmenge des Gleichungssystems in Abhängigkeit von x_3 lautet somit $\mathbb{L} = \{-5 - 1,5 \cdot x_3;\ -0,5 - 0,25 \cdot x_3\}$.

  Zurück zur Aufgabe

Lösungen zur elementaren Geometrie

Stereometrie

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Stereometrie*.

- Das Volumen einer Kugel mit Radius $r = \frac{d}{2} = 0,5\,\mu$m beträgt:

  $$V_{\text{Tropfen}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(0,5 \cdot 10^{-6}\,\text{m}\right)^3 \approx 5,236 \cdot 10^{-19}\,\text{m}^3$$

  Das insgesamt versprühte Volumen beträgt $V_{\text{ges}} = 5\,\text{ml} = 5 \cdot 10^{-3}\,\text{dm}^3 = 5 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^3$, weil $1\,\text{dm} = \frac{1}{10}\,\text{m}$ ist und somit $1\,\text{dm}^3 = \left(\frac{1}{10}\,\text{m}\right)^3 = 10^{-3}\,\text{m}^3$. Für die Anzahl n der entstehenden Tröpfchen ergibt sich somit:

  $$n = \frac{V_{\text{ges}}}{V_{\text{Tropfen}}} = \frac{5 \cdot 10^{-6}\,\text{m}}{5,236 \cdot 10^{-19}\,\text{m}^3} \approx 9,55 \cdot 10^{12}$$

  Es entstehen somit knapp 10^{13} Tröpfchen – also knapp 10 Billionen!

  Zurück zur Aufgabe

Lösungen zur Analysis

Eigenschaften von Funktionen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Eigenschaften von Funktionen*.

Stetigkeit

- Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann an einer Stelle x_0 stetig, wenn dort ihr linksseitiger und ihr rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen. Bei der stufenweise definierten Funktion gilt für den linksseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$:

  $$\lim_{\substack{x \to x_0, \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x_0 \to 1, \\ x < 1}} \left(1 - x^2\right) = 0$$

  Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt:

  $$\lim_{\substack{x \to x_0, \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x_0 \to 1, \\ x > 1}} (x - 1) = 0$$

  Beide Grenzwerte stimmen überein und sind mit dem Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle x_0 identisch. Damit ist die Funktion $f(x)$ an dieser Stelle stetig.

  Zurück zur Aufgabe

- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist als *Hyperbelfunktion* an jeder Stelle außer $x_0 = 0$ stetig. An dieser Stelle ist die Funktion nicht definiert, somit kann an dieser Stelle auch keine Aussage über ihre Stetigkeit getroffen werden.

  Die Funktion $f(x)$ ist also an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs und somit global stetig.

  Zurück zur Aufgabe

Differentialrechnung

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Differentialrechnung*.

- Differenzierbarkeit setzt Stetigkeit voraus, jede an einer Stelle x_0 differenzierbare Funktion ist somit an dieser Stelle auch stetig.

  Die Umkehrung gilt jedoch nicht: Beispielsweise ist die Funktion $y = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ zwar stetig (weil der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert sowie der Funktionswert an dieser Stelle übereinstimmen), aber nicht differenzierbar (weil die Steigungen unmittelbar links und rechts von x_0 nicht übereinstimmen).

  Zurück zur Aufgabe

- Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{c \cdot x}{x^2 - c^2}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ kann mittels der Quotientenregel bestimmt werden. Mit $f_1(x) = c \cdot x$ und $f_2(x) = x^2 - c^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' &= \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{\big(f_2(x)\big)^2} \\
&= \frac{(c \cdot 1) \cdot (x^2 - c^2) - c \cdot x \cdot (2 \cdot x - 0)}{(x^2 - c^2)^2} \\
&= \frac{c \cdot x^2 - c^3 - 2 \cdot c \cdot x^2}{(x^2 - c^2)^2} = \frac{-c \cdot x^2 - c^3}{(x^2 - c^2)^2} = \frac{-c \cdot (x^2 + c^2)}{(x^2 - c^2)^2}
\end{aligned}$$

  Zurück zur Aufgabe

Integralrechnung

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Integralrechnung*.

- Bei dieser Aufgabe entspricht die Variable x der Zeit t. Dies kommt bei physikalischen Aufgaben so häufig vor, dass eigens die Notation $\dot{f} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ anstelle von $f' \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ eingeführt wurde.

  Da die Zu- beziehungsweise Abflussmenge in den jeweiligen Zeitabschnitten konstant ist, kann die im Waschbecken enthaltene Wassermenge sehr einfach berechnet werden. Hierbei wird folgende Integralregel verwendet:

  $$f(x) = c \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) = c \cdot x$$

  Wendet man diese Regel an (mit t anstelle von x als Variable) auf den konstanten Volumenstrom $\dot{V}_1$ an, so ergibt sich mit $t_0 = 0$ für die im Waschbecken enthaltene Wassermenge am Ende des ersten Zeitabschnitts:

  $$\int_{t_0}^{t_1} \dot{V}_1 \cdot \mathrm{d}t = \left(\dot{V}_1 \cdot t\right)\Big|_{t_1}^{t_2} = \dot{V}_1 \cdot t_1 - \dot{V}_1 \cdot t_0 = 0,3\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}} \cdot 30\,\mathrm{s} = 9,0\,\mathrm{l}$$

  Der zweite Term $\dot{V}_1 \cdot t_0$ ergibt hierbei den Wert Null, da $t_0 = 0$ ist. Zum Zeitpunkt t_1 sind somit neun Liter Wasser im Waschbecken enthalten.

  Im Zeitraum zwischen t_1 und t_2 ist der Zu- beziehungsweise Ablauf verschlossen und somit der fließende Volumenstrom gleich Null. Die im Zeitraum zwischen t_2 und t_3 abfließende Wassermenge kann wiederum nach dem obigen Prinzip berechnet werden; es muss lediglich das negative Vorzeichen des Volumenstroms berücksichtigt werden.

  $$\int_{t_2}^{t_3} \dot{V}_2 \cdot \mathrm{d}t = \left(\dot{V}_2 \cdot t\right)\Big|_{t_2}^{t_3} = \dot{V}_2 \cdot t_3 - \dot{V}_3 \cdot t_2 = \dot{V}_2 \cdot (t_3 - t_2) = -1,2\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}} \cdot (50 - 45)\,\mathrm{s} = -6,0\,\mathrm{l}$$

  Die resultierende Wassermenge ergibt sich aus der Addition beider Integrale:

  $$V_{\mathrm{ges}} = \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}_1 \cdot \mathrm{d}t + \int_{t_2}^{t_3} \dot{V}_2 \cdot \mathrm{d}t = (9,0 - 6,0)\,\mathrm{l} = 3,0\,\mathrm{l}$$

  Unter den angegebenen Bedingungen werden zum Zeitpunkt t_3 somit drei Liter Wasser im Waschbecken sein.

  Zurück zur Aufgabe

- Das Integral $\int_0^1 x \cdot e^x \cdot \mathrm{d}x$ kann am Einfachsten mittels einer *partiellen Integration* berechnet werden, indem man sich die gegebene Funktion in der Gestalt $f(x) = f_1(x) \cdot f_2'(x)$ denkt; hierbei soll $f_1(x) = x$ und $f_2'(x) = e^x$ gesetzt werden.

  Für eine partielle Integration gilt allgemein:

  $$\int_a^b f_1(x) \cdot f_2'(x) = \Big(f_1(x) \cdot f_2(x)\Big)\Big|_{\mathrm{a}}^{b} - \int_a^b f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Zur Berechnung des Integrals muss somit die Ableitung der Funktion $f_1(x)$ sowie die Stammfunktion der Funktion $f_2(x)$ gefunden werden:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x \quad &\Longleftrightarrow \quad f_1'(x) &= 1 \\ f_2'(x) &= e^x \quad &\Longleftrightarrow \quad F_2(x) &= e^x \end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$\int_0^1 x \cdot e^x \cdot \mathrm{d}x = (x \cdot e^x)\Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \cdot \mathrm{d}x$$

Das Integral $\int_0^1 1 \cdot e^x \cdot \mathrm{d}x$ kann unmittelbar als $e^x\big|_0^1$ geschrieben werden, da die Stammfunktion zu e^x wiederum e^x ist. Damit erhält man für die obige Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot e^x \cdot \mathrm{d}x &= (x \cdot e^x)\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 \\ &= \Big(x \cdot e^x - e^x\Big)\Big|_0^1 \\ &= \Big((x-1) \cdot e^x\Big)\Big|_0^1 \end{aligned}$$

Die beiden Terme dürfen in der zweiten Zeile zusammen gezogen werden, da für beide die gleichen Integrationsgrenzen gelten. Zur Auswertung müssen diese nun noch eingesetzt werden. Damit erhält man:

$$\int_0^1 x \cdot e^x \cdot \mathrm{d}x = \Big((1-1) \cdot e^1\Big) - \Big((0-1) \cdot e^0\Big) = 1$$

Das Integral ergibt wegen $e^0 = 1$ somit den Wert 1.

Zurück zur Aufgabe

Lösungen zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie

Determinanten

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Determinanten*.

- Um die Determinante mittels der Regel von Sarrus zu bestimmen, schreibt man die erste und zweite Spalte noch einmal hinter die dritte Spalte. Dann berechnet man zunächst die Produkte der Zahlen in jeder Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten) und bildet ihren Summenwert:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 3 & & -2 & & 1 & & 3 \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\ -1 & & -5 & & 4 & & -1 & & -5 \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 0 & & 7 & & -2 & & 0 & & 7 \end{array}$$

$$= 10 + 0 + 14 = 24$$

Anschließend bildet man die Summe der Produkte der in den Nebendiagonalen stehenden Zahlen (links unten nach rechts oben):

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 3 & & -2 & & 1 & & 3 \\ & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ -1 & & -5 & & 4 & & -1 & & -5 \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\ 0 & & 7 & & -2 & & 0 & & 7 \end{array}$$

$$= 0 + 28 + 6 = 34$$

Schließlich subtrahiert man beide Werte voneinander; das Ergebnis lautet somit $24 - 34 = -10$.

Zurück zur Aufgabe

- a) Zunächst kann man anhand der Koeffizienten-Determinate prüfen, ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -9 - 15 = -24$$

Der Wert der Determinante ist ungleich Null, das Gleichungssystem ist somit eindeutig lösbar.

Zur Bestimmung der Unbekannten x_1 bildet man eine zweite Determinante, wobei die Koeffizienten von x_1 (die erste Spalte) durch die Werte auf der rechten Gleichungsseite ersetzt werden:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -24 & -9 \end{vmatrix} = -72 - (-120) = 48$$

Dividiert man den Wert dieser Determinante durch den Wert der Koeffizienten-Determinate, so erhält man als Wert für x_1:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{48}{-24} = -2$$

Zur Bestimmung der Unbekannten x_2 kann man entsprechend eine weitere Determinante bilden, bei der nun die Koeffizienten von x_2 (die zweite Spalte) durch die Werte auf der rechten Gleichungsseite ersetzt werden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -24 \end{vmatrix} = -24 - 24 = -48$$

Dividiert man den Wert dieser Determinante durch den Wert der Koeffizienten-Determinate, so erhält man als Wert für x_2:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-48}{24} = +2$$

Das Gleichungssystem hat somit die Lösung $\mathbb{L} = \{(-2;\ 2)\}$.

- b) Zunächst kann man wiederum anhand der Koeffizienten-Determinate prüfen, ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Nach der Regel von Sarrus erhält man:

  $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -2 & -7 & 3 \\ 3 & -9 & 1 \end{vmatrix} = -35 + 18 + (-54) - 63 - (-135) - (-4) = 5$$

  Der Wert der Determinante ist ungleich Null, das Gleichungssystem ist somit eindeutig lösbar.

  Zur Bestimmung der Unbekannten x_1 bildet man erneut eine Determinante, wobei die Koeffizienten von x_1 (die erste Spalte) durch die Werte auf der rechten Gleichungsseite ersetzt werden:

  $$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 3 \\ 15 & -9 & 1 \end{vmatrix} = -77 + 90 + 27 - 315 + 297 - 2 = 20$$

  Dividiert man den Wert dieser Determinante durch den Wert der Koeffizienten-Determinate, so erhält man als Wert für x_1:

  $$x_1 = \frac{20}{5} = 4$$

  Zur Bestimmung der Unbekannten x_2 geht man wiederum von der ursprünglichen Determinante aus, ersetzt allerdings die Koeffizienten von x_2 (die zweite Spalte) durch die Werte auf der rechten Gleichungsseite:

  $$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 15 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 99 + 90 - (-9) - 225 - (-22) = 0$$

  Der Wert dieser Determinante ist Null; somit ergibt auch eine Division durch den Wert 5 der Koeffizienten-Determinante den Wert 0:

  $$x_2 = \frac{0}{5} = 0$$

  Zur Bestimmung der Unbekannten x_3 geht man erneut von der ursprünglichen Determinante aus, ersetzt allerdings die Koeffizienten von x_3 (die zweite Spalte) durch die Werte auf der rechten Gleichungsseite:

  $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ -2 & -7 & 1 \\ 3 & -9 & 15 \end{vmatrix} = -525 + 6 + 198 - (-231) - (-45) - (-60) = 15$$

  Dividiert man den Wert dieser Determinante durch den Wert der Koeffizienten-Determinate, so erhält man als Wert für x_3:

  $$x_3 = \frac{15}{5} = 3$$

  Das Gleichungssystem hat somit die Lösung $\mathbb{L} = \{(4;\ 0;\ 3)\}$.

  Zurück zur Aufgabe

Lösungen zur Stochastik

Zufallsexperimente und Ereignisse

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Zufallsexperimente und Ereignisse*.

- Wird die Zahl 2 gewürfelt, so tritt sowohl das Ereignis ω_1 ("Die gewürfelte Zahl ist eine Primzahl.") als auch das Ereignis ω_2 ("Die gewürfelte Zahl ist gerade.") ein. Die Ergebnisse des Ergebnisraums müssen sich allerdings gegenseitig ausschließen.

  Zurück zur Aufgabe

Lösungen zur Statistik

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Beschreibende Statistik*.

- Da die unterschiedlichen Kinder-Anzahlen unterschiedlich gewichtet sind, muss zur Bestimmung des Durchschnittwerts mit der Formel für das gewichtete arithmetische Mittel gerechnet werden. Da bereits die relativen Häufigkeiten h_{i} in der Tabelle gegeben sind, genügt es, diese mit den jeweiligen Merkmalswerten zu multiplizieren und die Produktwerte zu addieren:

  $$\begin{aligned}\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} h_{\mathrm{i}} \cdot x_{\mathrm{i}} = \big(&0 \cdot 0,7202 + 1 \cdot 0,1466 + 2 \cdot 0,1005 \\ &+ 3 \cdot 0,0256 + 4 \cdot 0,0050 + 5 \cdot 0,0018\big) \approx 0,45\end{aligned}$$

  Je Haushalt gibt es in Deutschland somit (nur) rund $0,45$ Kinder.

  Zurück zur Aufgabe

Links und Quellen

Computer-Algebra-Systeme

- Sympy

  Sympy steht für "Symbolic Python" und bietet ein Computer-Algebra-System, das in die Programmiersprache Python eingebunden ist. Wer Python-Syntax kennt, findet sich also sehr schnell mit Sympy zurecht.

  Sympy hat einen erheblichen Funktionsumfang. Es kann beispielsweise Terme vereinfachen und vielerlei Arten von Gleichungen und Gleichungssystemen lösen; zudem kann Sympy unmittelbar mit der Matplotlib, dem bekanntesten Funktionenplotter in Python, kombiniert werden, um Lösungen als Diagramme darzustellen.

  Sympy wird auch für das Erstellen der Grund-Wissen-Seite genutzt; dort findet sich inzwischen auch ein kurzes Sympy-Tutorial.

- Maxima

  Maxima ist ein einfach zu erlernendes Computer-Algebra-System, das häufig als Lehr- und Lernplattform Anwendung findet.

  Unter Linux Mint, Ubuntu, Debian u.ä. lässt sich Maxima einfach über folgendes Paket installieren:

  ```
  sudo aptitude install wxmaxima
  ```

  Anschließend kann `wxMaxima` als graphische Oberfläche über einen Eintrag im Startmenü beziehungsweise einen Anwendungsstarter (`F2`) aufgerufen werden. Als textbasiertes Programm kann in einer Shell `maxima` aufgerufen werden.

  Zu Maxima existieren im deutschsprachigen Raum u.a. eine Einführung (PDF), ein Workshop und eine ausführliche Dokumentation, die jeweils auch für einen schnellen Einstieg geeignet sind. Zusätzlich gibt es ein empfehlenswertes Maxima-Weblog, mit zahlreichen Anwendungs-Beispielen.

- Sage

  Sage ist ein riesiges Software-Projekt (rund 2 Gigabyte!) mit dem Ziel, eine Vielzahl an mathematischen Funktionalitäten zu vereinen. Auf der Sage-Projektseite gibt es vorkompilierte Pakete als Downloads.

  Unter Linux Mint, Ubuntu, Debian u.ä. lässt sich Sage auch über folgende Installationsroutine installieren:

```
sudo add-apt-repository ppa:aims/sagemath
sudo apt-get update
sudo apt-get install sagemath-upstream-binary
```

Anschließend kann Sage über einen Eintrag im Startmenü, oder über die Eingabe von `sage` in einem Anwendungsstarter (`F2`) oder einer Shell gestartet werden. Eine entsprechend ausführliche, englischsprachige Dokumentation findet sich als Reference Manual ebenfalls auf der Projektseite.

Funktionen-Plotter

Viele Mathematik-Programme haben bereits einen Funktionenplotter in der Software integriert. Zusätzlich gibt es (skriptbare) Funktionenplotter, die wahlweise direkt als Interpreter genutzt werden können oder als Skriptsprache von anderen Programmen genutzt werden können.

- Matplotlib

  Die Matplotlib ist eine Codebibliothek für die Programmiersprache Python. Sie kann von Interpretern wie IPython aus aufgerufen oder kann von anderen in Python geschriebenen Werkzeugen (insbesondere auch in Sphinx-Dokumentationen) genutzt werden.

  Unter Linux Mint, Ubuntu, Debian u.ä. lässt sich die Matplotlib auf folgende Weise installieren:

  ```
  sudo aptitude install bpython ipython python-setuptools
  sudo easy_install matplotlib
  ```

  Anschließend können durch den Aufruf von `ipython -pylab` in einer Shell die Funktionen der Matplotlib sowie weitere numerische Funktionen direkt über den Interpreter genutzt werden. Hierzu gibt es u.a. ein gelungenes Einstiegs-Tutorial und ein weiteres Tutorial mit bunten Bildchen; auch auf der Grund-Wissen-Seite gibt es inzwischen ein kleines Matplotlib-Tutorial.

- Gnuplot

  Gnuplot ist weit entwickelter Funktionenplotter für 2D- und 3D-Plots, der als eigener Interpreter oder als Skriptsprache genutzt werden kann.

  Unter Linux Mint, Ubuntu, Debian u.ä. lässt sich gnuplot einfach über folgendes Paket installieren:

  ```
  sudo aptitude install gnuplot gnuplot-x11 gnuplot-doc
  ```

  Anschließend kann Gnuplot über einen Eintrag im Startmenü, oder über die Eingabe von `gnuplot` in einem Anwendungsstarter (`F2`) oder einer Shell gestartet werden.

  Zu Gnuplot gibt es u.a. eine einführende PDF-Präsentation, ein Kurz-Tutorial *http://www3.physik.uni-stuttgart.de/studium/praktika/ap/pdf_dateien/Allgemeines/BeschreibungGnuplot.pdf* und eine englischsprachige Kurz-Einführung. Weitere Dokumentationen und Beispiel-Plots finden sich auf der Gnuplot-Projektseite.

Geometrie-Software

- Geogebra

  Geogebra ist ein Programm zur Konstruktion und Auswertung geometrischer von Konstruktionen. Die erstellten Zeichnungen können in einer Vielzahl an Formaten, u.a. PDF, PNG und SVG, ausgegeben werden.

  Unter Linux Mint, Ubuntu, Debian u.ä. lässt sich Geogebra einfach über folgendes Paket installieren:

  ```
  sudo aptitude install geogebra-gnome
  ```

  Wer KDE benutzt, kann anstelle `geogebra-gnome` auch `geogebra-kde` installieren. Anschließend kann Geogebra über einen Eintrag im Startmenü, oder über die Eingabe von `geogebra` in einem Anwendungsstarter (`F2`) oder einer Shell gestartet werden.

  Zu Geogebra existiert ein umfangreiches Wiki, das neben Tutorials, Tipps und Tricks auch ein deutschsprachiges Handbuch enthält.

Simulations-Werkzeuge

- Scilab

  Unter Linux Mint, Ubuntu, Debian u.ä. lässt sich Scilab einfach über folgendes Paket installieren:

  ```
  sudo aptitude install scilab
  ```

  Anschließend kann Scilab über einen Eintrag im Startmenü, oder über die Eingabe von `scilab` in einem Anwendungsstarter (`F2`) oder einer Shell gestartet werden.

  Zu Scilab gibt es im deutschsprachigen Bereich neben mehreren kommerziellen Büchern auch Anleitungen (zu etwas fortgeschrittenen Anwendungen) als PDF-Dateien, und zwar hier, hier und hier.

  Umfangreiche, englischsprachige Dokumentationen finden sich auf der Scilab-Projektseite sowie in den internen Hilfe-Seiten, die sich mittels des Pakets `scilab-doc` installieren lassen.

- Octave

  Unter Linux Mint, Ubuntu, Debian u.ä. lässt sich Octave einfach über folgendes Paket installieren:

  ```
  sudo aptitude install octave3.2
  ```

Zusätzlich ist eine Installation der Pakete `gnuplot` und `octave-epstk` als Funktionenplotter sinnvoll. Anschließend kann Octave über einen Eintrag im Startmenü oder über die Eingabe von `octave` in einem Anwendungsstarter (`F2`) oder einer Shell gestartet werden.

Zu Octave gibt es im deutschsprachigen Raum mehrere Tutorials, u.a. hier. Eine komplette, englischsprachige Dokumentation existiert als Online-Handbuch oder PDF-Version.

Statistik-Software

- Gnumeric

  Gnumeric ist als Tabelleneditor eine schlanke Alternative zum Tabellenkalkulationsprogramm Calc von LibreOffice. Neben vielen Import- und Export-Funktionen verfügt es auch über statistische Funktionen und einen integrierten Funktionenplotter.

  Unter Linux Mint, Ubuntu, Debian u.ä. lässt sich Gnumeric einfach über folgendes Paket installieren:

  ```
  sudo aptitude install gnumeric
  ```

  Anschließend kann Gnumeric über einen Eintrag im Startmenü, oder über die Eingabe von `gnumeric` in einem Anwendungsstarter (`F2`) oder einer Shell gestartet werden.

  Die graphische Benutzeroberfläche ist weitestgehend selbsterklärend. Eine Dokumentation gibt es unter den integrierten Hilfeseiten sowie in englischsprachiger Form auf der Gnumeric-Projektseite.

- R

  R ist eine Interpreter-Software für statistische Funktionen und gleichzeitig eine skriptbare Programmiersprache. Im wissenschaftlichen Bereich hat sich R in den letzten Jahren zunehmend als Standard-Werkzeug für statistische Analysen etabliert.

  Unter Linux Mint, Ubuntu, Debian u.ä. lässt sich R einfach über folgendes Paket installieren:

  ```
  sudo aptitude install r-base r-recommended
  ```

  Anschließend kann R in einer Shell mittels `R` aufgerufen werden. Als graphische Bedienoberfläche kann beispielsweise `rkward` nachinstalliert werden.

  Als Dokumentationen gibt es ein Wikibook sowie zum Einstieg eine Einführung in R und einen R Reader als PDF-Dateien. Weitere Dokumentationen in anderen Sprachen sind in einer Manual-Liste aufgeführt. Auf der R-Projektseite ist zusätzlich eine Vielzahl an Erweiterungen mitsamt Beschreibungen zu finden.

Youtube-Videos

- Mathe-Videos von "Educational Videos and Lectures"

Diverses

- Mathematik-Wikipedia
- Online-Mathe-Lexikon
- Online-Mathebuch "Mathe 1"
- Mathematik – Erste Hilfe
- Mathematischer Vorkurs zum Physik-Studium (pdf)
- Mathematische Basteleien

Weiterführende Mathematik

- FH-Lehrmaterialien Mathematik von Alexander Stoffel

Quellenangaben zur Logik

Der strukturelle Aufbau dieses Abschnitts orientiert sich an *[Simon1980]* (Seite 33 ff). Ähnliche inhaltliche Zusammenfassungen sind in vielerlei Fachbüchern zu finden.

Quellenangaben zur Mengenlehre

Die strukturellen Vorlagen für diesen Abschnitt stammen aus *[Simon1980]* (Seite 57 ff) sowie *[Voelkel1991]* (Seite 15 ff).

Quellenangaben zu Arithmetik

Im Abschnitt *Folgen und Reihen* wurden mehrere fachliche Ergänzungen von *[Simon1980]* (Seite 448 ff.) und *[Bewert1971]* (Seite 183 ff.) aufgegriffen. Die Hinweise auf den rechnerischen Umgang mit dem Summenzeichen sind inhaltlich an *[Cramer2009]* (Seite 116) angelehnt. Der Beweis zur Auswertungsformel für geometrische Reihen ist aus *[Simon1980]* (Seite 459 f.) entnommen.

Die im Abschnitt *Weitere Teilbarkeitsregeln* aufgeführten Regeln sind in ausführlicher Form (inklusive Beweisen) in *[Bittner1979]* (Seite 31 ff.) zu finden.

Quellenangaben zu elementarer Algebra

Der Beweis zum Satz des Vieta wird in ähnlicher Form *[Simon1980]* (Seiten 257f. und 263) geführt.

Quellenangaben zu elementarer Geometrie

Der Aufbau dieses Kapitels orientiert sich an *[Bewert1985]* und *[Voelkel1991]*.

Quellenangaben zu Stochastik

Der bisherige Aufbau dieses Abschnitts orientiert sich an *[Olmscheid1994]*.

Literaturverzeichnis

[Bewert1971] Fritz Bewert: Lehr- und Übungsbuch Mathematik 1: Arithmetik, Algebra und elementare Funktionenlehre. Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, 1971.

[Bewert1985] Fritz Bewert: Lehr- und Übungsbuch Mathematik 2: Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie der Ebene. Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, 1985.

[Bewert1982] Fritz Bewert: Lehr- und Übungsbuch Mathematik 3: Analytische Geometrie, Vektorrechnung und Infinitesimalrechnung. Harri Deutsch Verlag, Frankfurt, 1982.

[Bittner1979] Rudolf Bittner, Dieter Ilse, Siegmar Kubicek, Werner Tietz: Kompendium der Mathematik. Volk und Wissen Verlag, Berlin, 1979.

[Cramer2009] Erhard Cramer, Johanna Neslehova: Vorkurs Mathematik. Springer Verlag, Berlin, 2009.

[Hoffmann2004] Manfred Hoffmann: Mathematik – Formeln, Regeln und Merksätze. Compact Verlag, München, 2004.

[Mueller-Fonfara2006] Robert Müller-Fonfara und Wolfgang Scholl: Mathematik verständlich. Weltbild Verlag, 2006.

[Olmscheid1994] Werner Olmscheid: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Softrutti Verlag, 1994.

[Potuntke2006] Werner Poguntke: Keine Angst vor Mathe. Teubner Verlag, 2006.

[Rapp2010] Heinz Rapp: Mathematik für die Fachschule Technik. Vieweg-Teubner Verlag, 2010.

[Simon1980] Hans Simon, Kurt Stahl und Helmut Grabowski: Taschenbuch der Schulmathematik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1980.

[Voelkel1991] Siegfried Völkel: Mathematik für Techniker. Fachbuch-Verlag Leipzig, 1991.

Stichwortverzeichnis

Symbols

A

B

C

L

M

N

O

P

W

Z